Processamento Digital de Imagens

Transformada de Fourier

CPGCG/UFPR

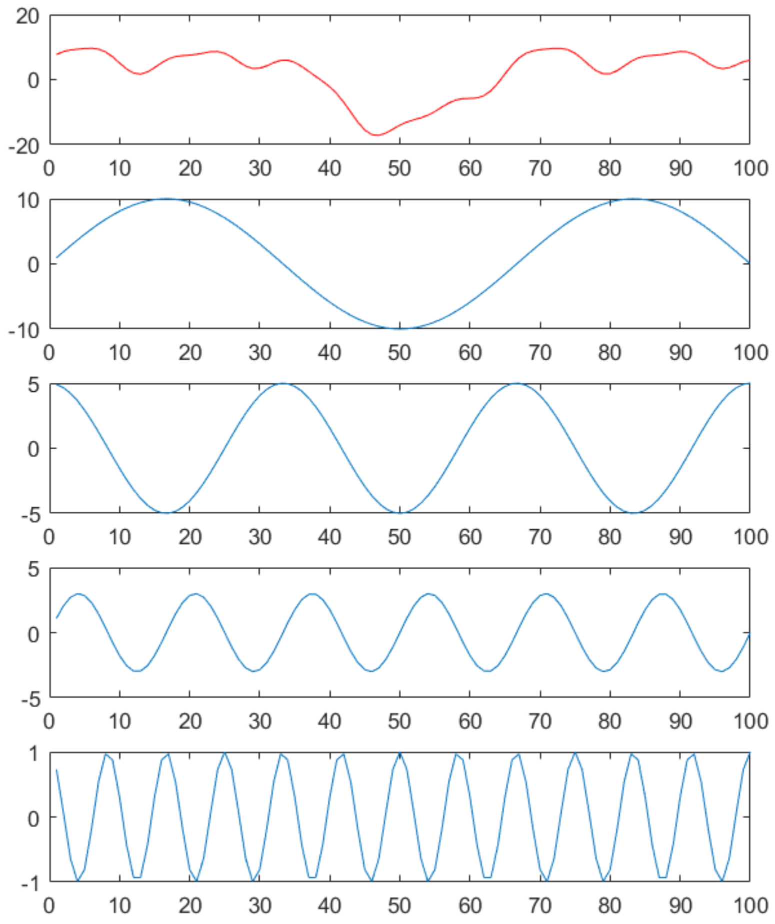
Prof. Dr. Jorge Centeno

Fourier

Segundo Fourier:

qualquer sinal (em nosso caso, uma imagem) pode ser expresso como uma soma de uma série de sinusoidais (senos e cossenos).

- No caso de imagens, o sinal é o valor digital do pixel.



Fourier

Seja

Uma variável real x ... e uma função contínua f(x)

A transformada de Fourier F(u), de uma função contínua f(x) pode ser definida como:

$$F(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{(-j\,2\,\pi\,u\,x)}\, dx$$

Com : $j = \sqrt{-1}$

A partir de F(u), pode-se obter f(x) através da transformada inversa de Fourier:

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(u)\, e^{(-j\,2\,\pi\,u\,x)}\, du$$

- Pela equação de Euler:

$$e^{(-j\,2\,\pi\,u\,x)} = \cos(2\,\pi\,u\,x) - j\,\sin(2\,\pi\,u\,x)$$

- logo

$$F(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{(-j\,2\,\pi\,u\,x)}\, dx$$

$$F(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, \{\cos(2\,\pi\,u\,x) - j\,\sin(2\,\pi\,u\,x)\}\, dx$$

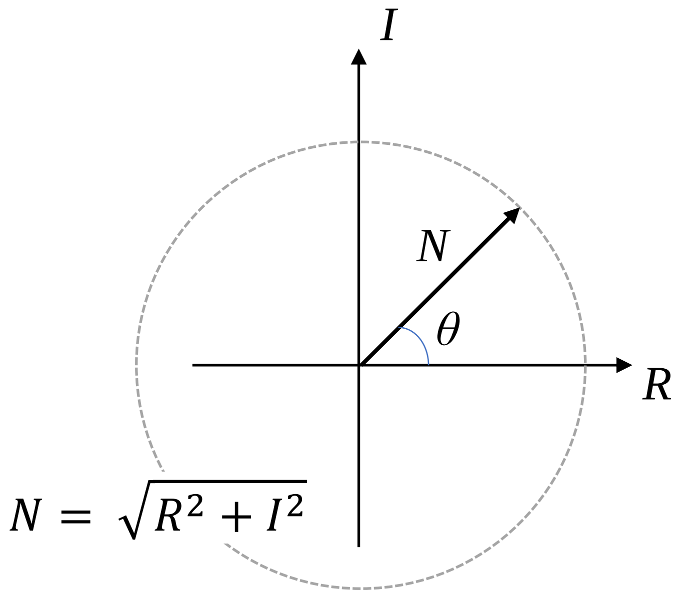
- Ou seja, a função tem uma parte Real (*R*) e outra imaginária (*I*)

$$F(u) = R(u) + j\,I(u)$$

As partes reais e imaginárias também podem ser representadas em coordenadas polares, considerando a direção (fase θ) e a norma do vetor (R,I)

Norma: |F(u)|

$$F(u) = |F(u)|\, e^{j\,\theta\,(u)}$$



$$|\mathrm{F(u)}| = \sqrt{R^2(u) + I^2\,(u)}$$

$$\theta\,(u) = tan^{-1}[I(u)/R(u)]$$

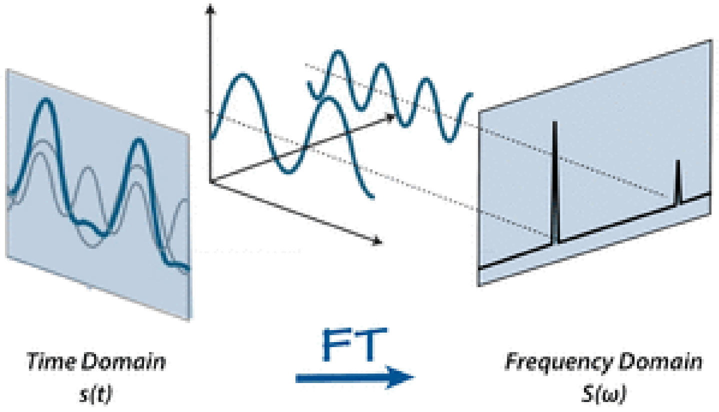
Costuma-se representar o “espectro de potência” de f(x), que é o quadrado da norma

$$\mathrm{P(u)} = |\mathrm{F(u)}|^2 = R^2(u) + I^2\,(u)$$

$$F(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\{\cos(2\,\pi\,u\,x) - j\,\sin(2\,\pi\,u\,x)\}\,dx$$

A integral mostra que esta função deve ser calculada e somada para todos os valores possíveis de “x” e f(x).

- Então, a função f(x) pode ser representada por uma série de senos e cossenos, uma soma infinita.



Exemplo (Gonzales e Woods)

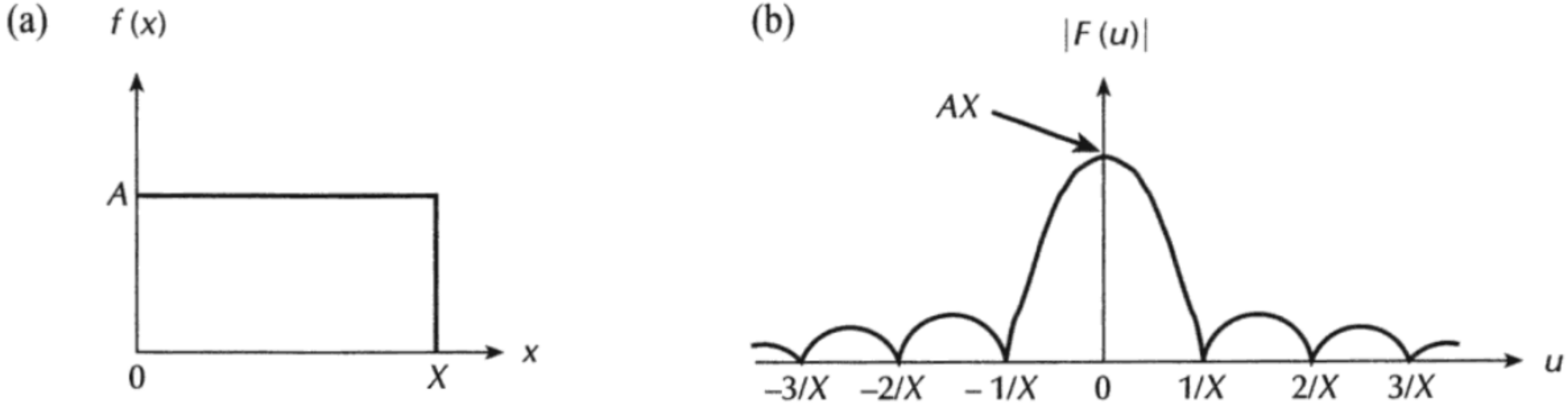


Figura 3.1 — *Uma função simples e seu espectro de Fourier.*

Fourier 2D

Para o caso bidimensional (x,y) e uma função contínua f(x,y)

A transformada de Fourier pode ser definida como:

$$F(u,v) = \int \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\, e^{[-j\,2\,\pi\,(u\,x+v\,y)\,]}\, dx\, dy$$

E sua inversa:

$$f(x,y) = \int \int_{-\infty}^{\infty} F(u,v)\, e^{(-j\,2\,\pi\,[u\,x+v\,y])}\, du\, dv$$

Exemplo (Gonzales e Woods)

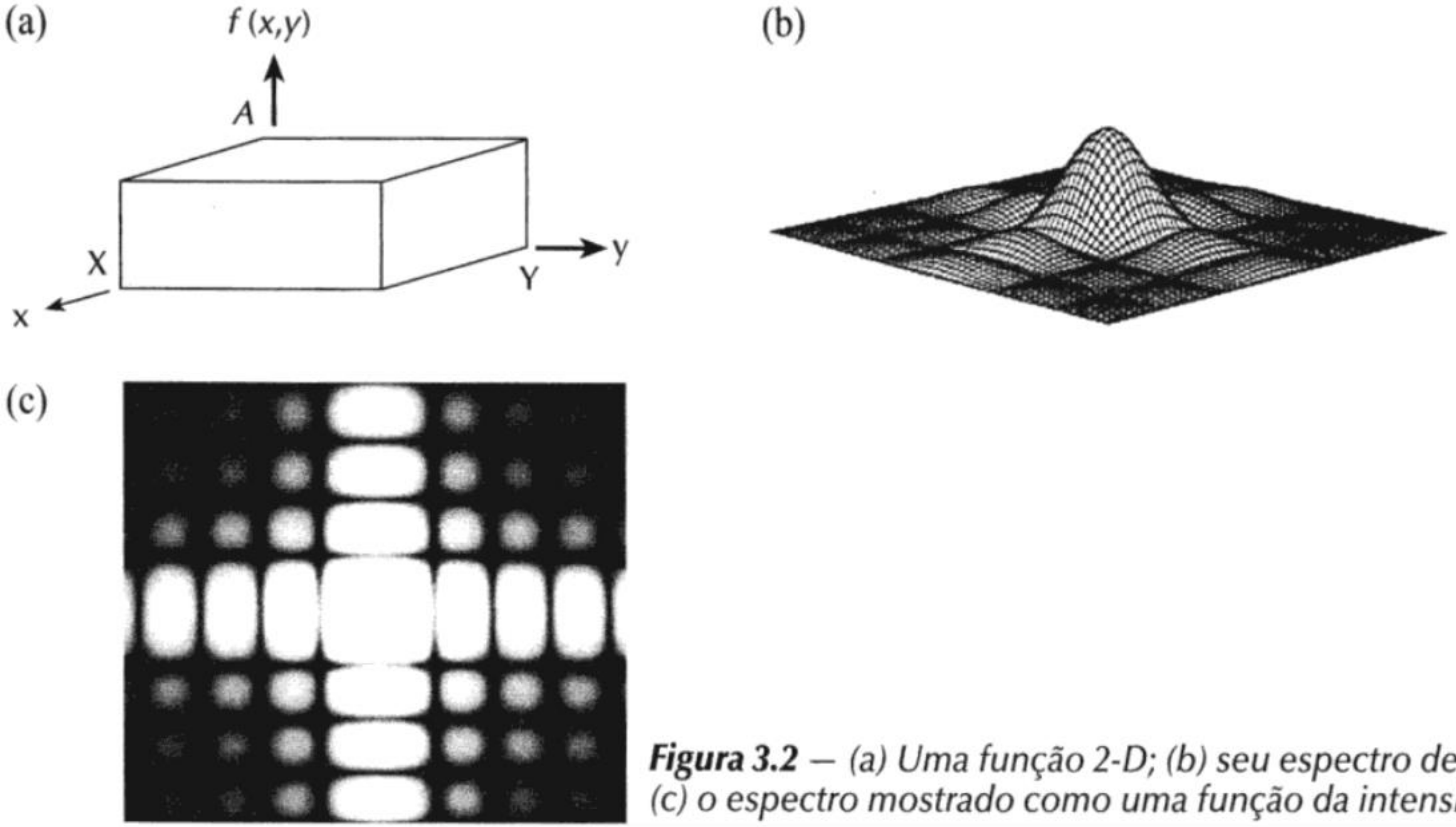


Figura 3.2 — (a) Uma função 2-D; (b) seu espectro de Fourier; e (c) o espectro mostrado como uma função da intensidade.

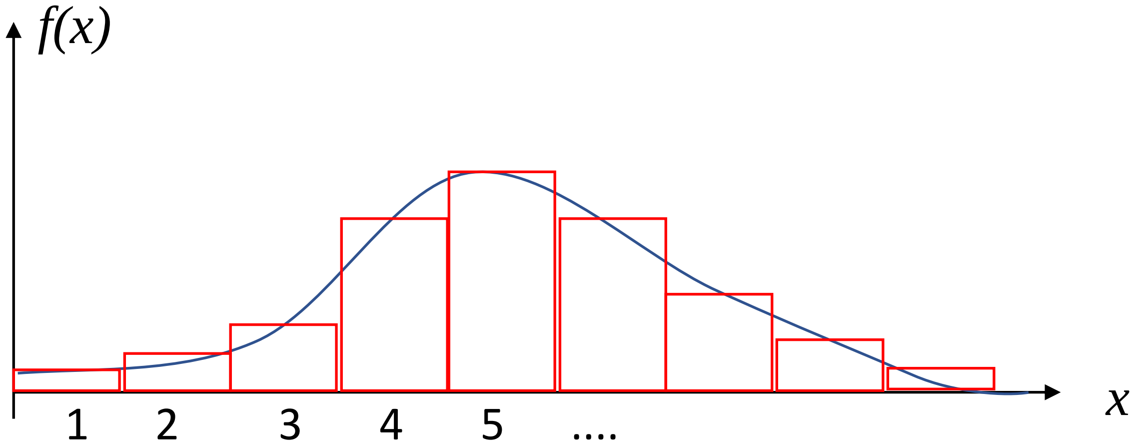
Transfromada DISCRETA de Fourier

- Se uma função for discretizada, então ela passa a ser representada por uma série de valores discretos espaçados de forma regular:

$$x = 1,2,3,\dots.\ N$$

- E

$$f(1), f(2), f(3), \dots\ f(N\text{-}1)$$



Transformada discreta de Fourier

A transformada de Fourier F(u), de uma função discreta f(x) :

$$F(u) = \sum_{x=0}^{N-1} f(x)\, e^{(-j\, 2\, \pi\, u\, x/N)}\, dx$$

e sua inversa:

$$f(x) = \sum_{1}^{N-1} F(u)\, e^{(-j\, 2\, \pi\, u\, x/N)}\, du$$

Transformada discreta de Fourier 2D

- u,v são chamadas de variáveis de frequências

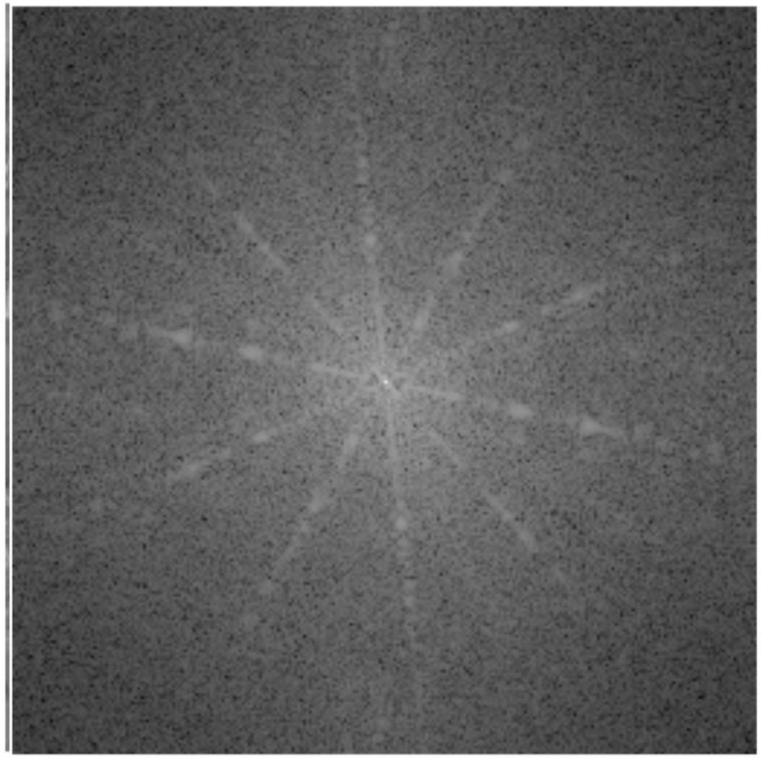
$$F(u,v) = \frac{1}{NM}\sum_{x=0}^{N-1}\sum_{y=0}^{N-1} f(x,y)\, e^{(-j\,2\,\pi(\frac{u\,x}{M}+\frac{vy}{N})}$$

u variando de 1,2,3... M-1
v variando de 1,2,3,... N-1

$$f(x,y) = \sum_{x=0}^{N-1}\sum_{y=0}^{N-1} F(u,v)\, e^{\left(-j\,2\,\pi(\frac{u\,x}{M}+\frac{vy}{N})\right)}$$

x variando de 1,2,3... M-1
y variando de 1,2,3,... N-1

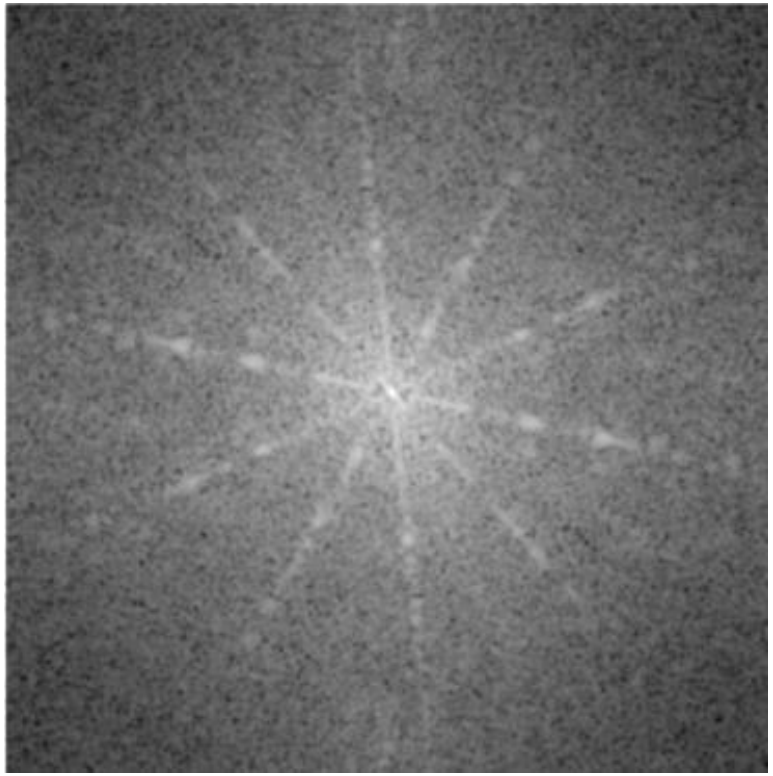
Exemplo 2d

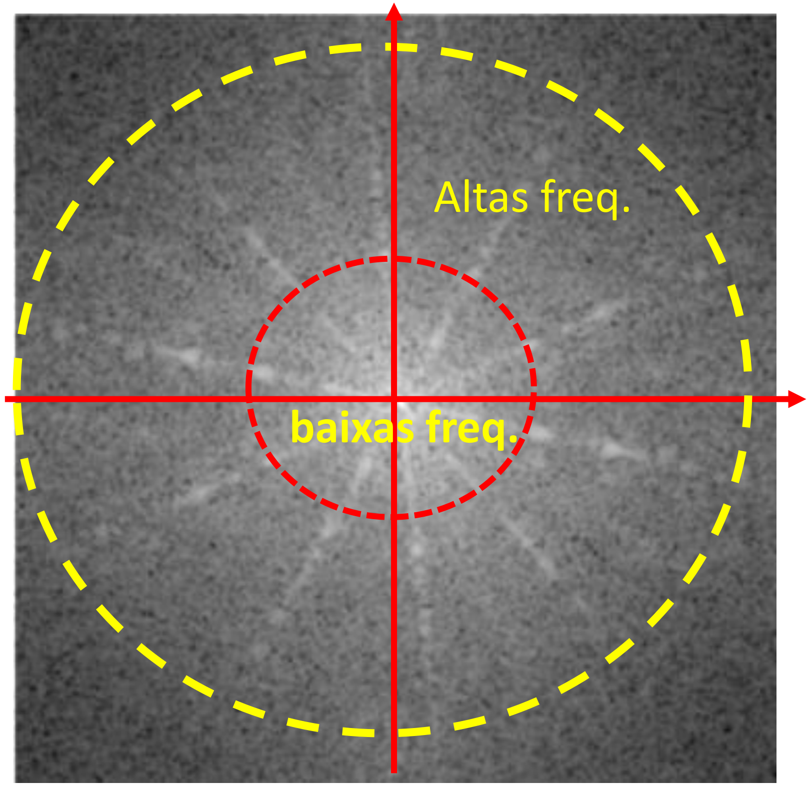
 

Fourier Domain Anomaly Detection and Spectral Fusion for Stripe Noise Removal of TIR Imagery

by Qingjie Zeng, Hanlin Qin *, Xiang Yan and Tingwu Yang

Exemplo 2d





Observações

Na Transformada de Fourier:

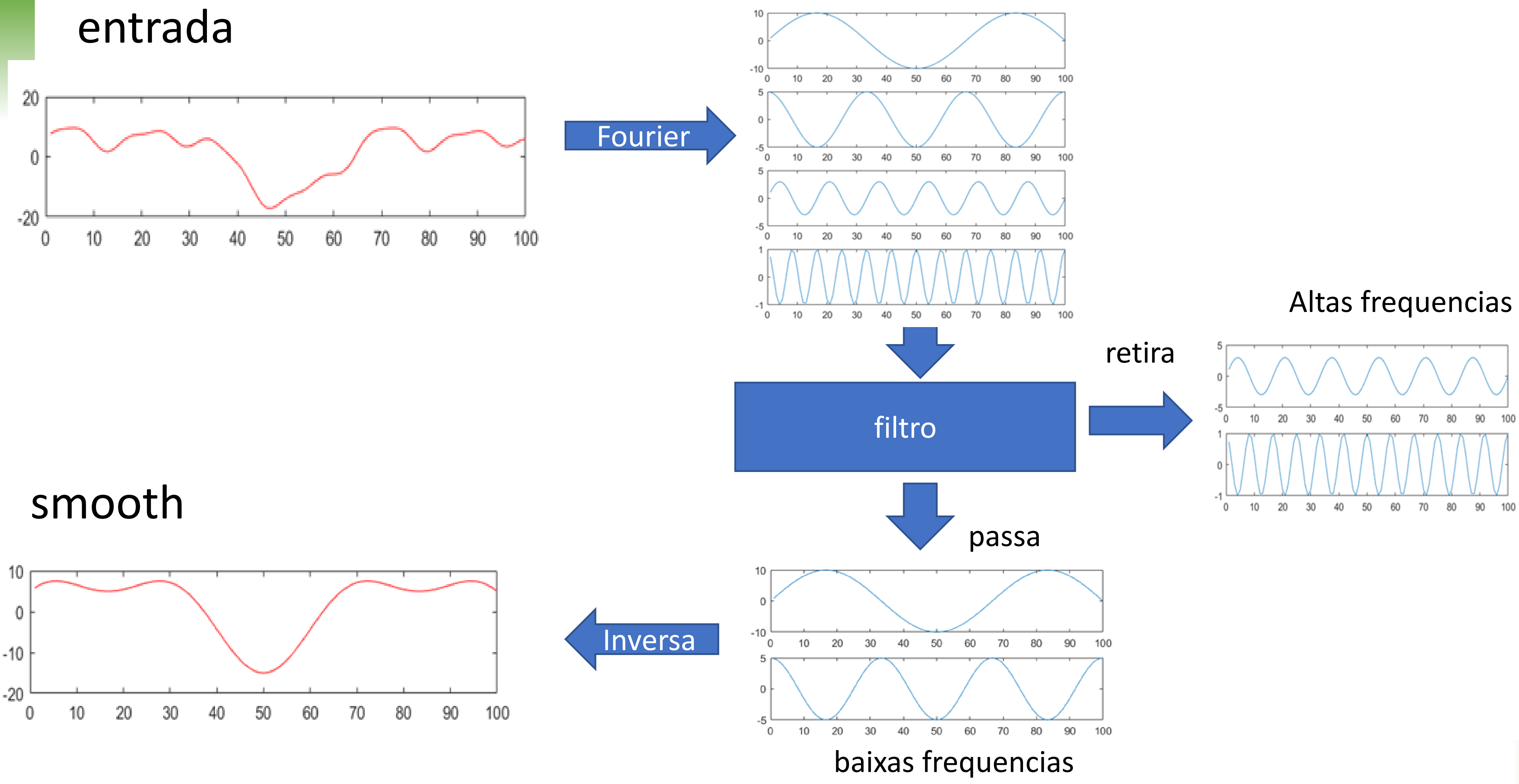
- Não há perda de informação durante a mudança de domínios, A imagem é apenas representada em outro espaço: no domínio de frequências.
- Esta representação permite identificar altas e baixas frequências, bem como a ocorrência de alinhamentos espaciais.
- **Pergunta:**
- O que ocorre se, em uma imagem, são retiradas as altas frequências e apenas as baixas frequências são preservadas?

Detalhes da imagem geram altas frequências.

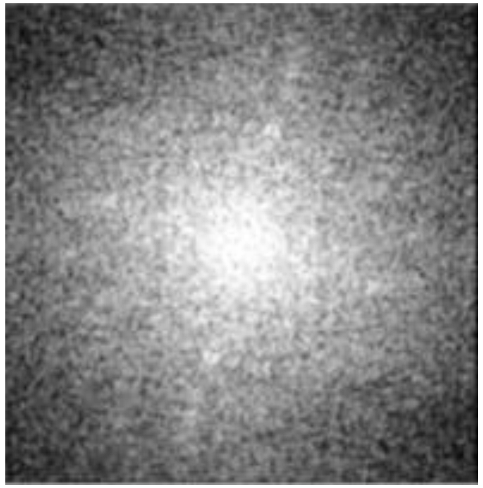
Detalhes são causados por variações bruscas da valor digital: como ocorrem em bordas, quinas ou pontos.

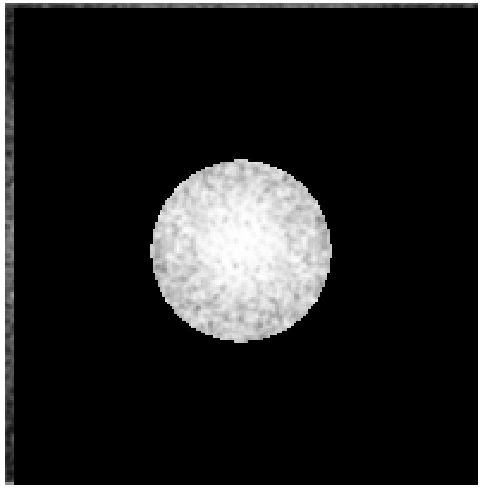
As baixas frequências estão associadas à forma geral da imagem

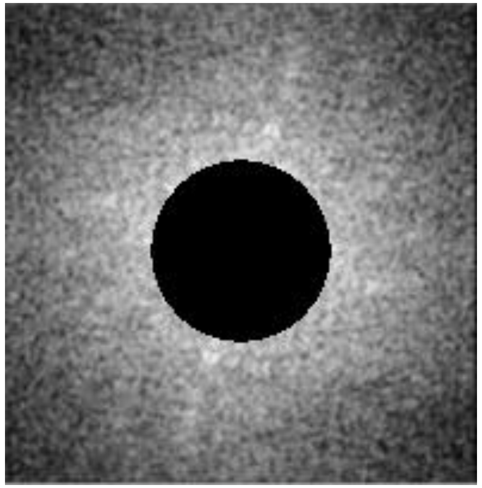
Filtragem seletiva de frequencias

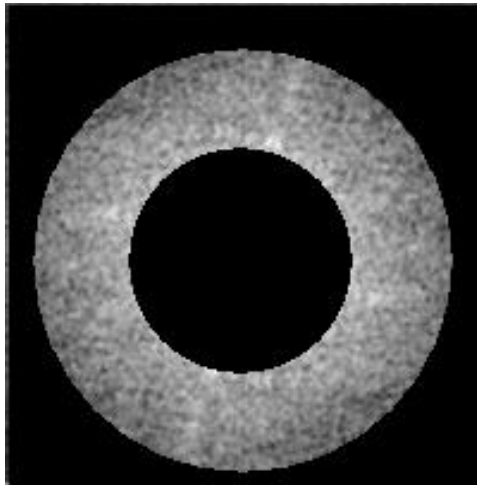


Original
Passa baixas,
Passa altas
Passa bandas

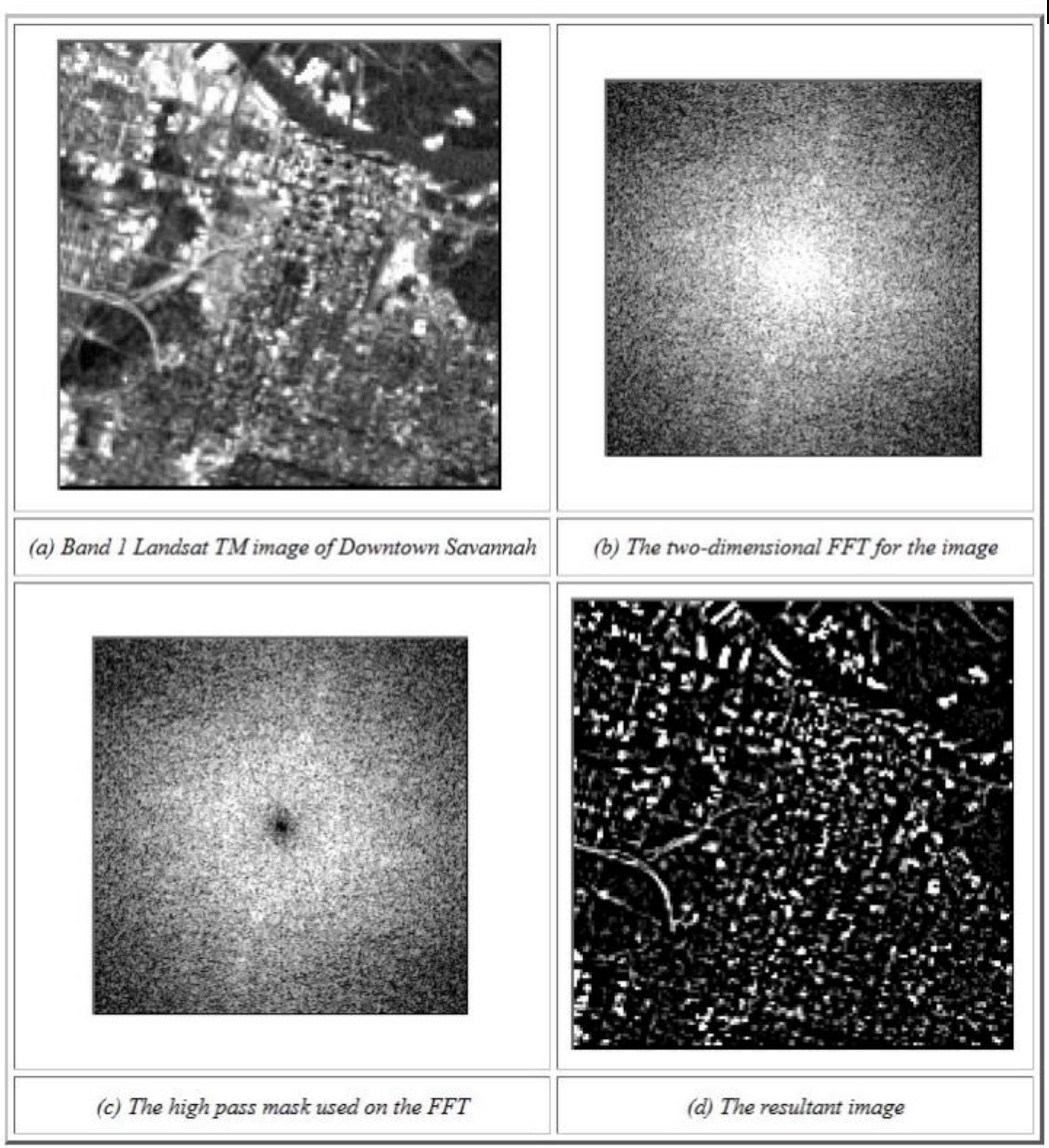








Remoção de baixas frequencias...



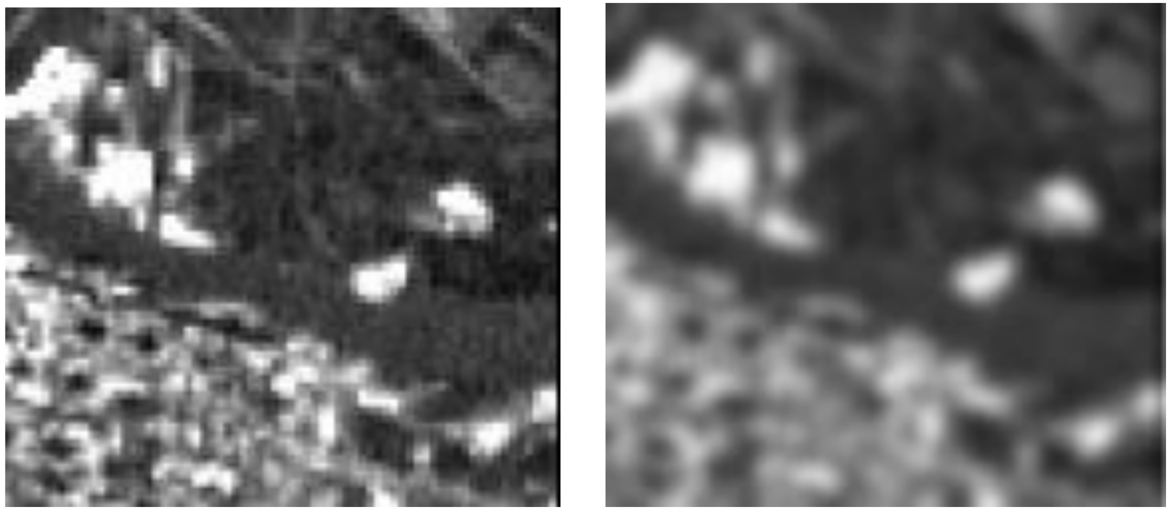
(a) Band 1 Landsat TM image of Downtown Savannah

(b) The two-dimensional FFT for the image

(c) The high pass mask used on the FFT

(d) The resultant image

Spatial Enhancement
Nickolas Faust



- Se as altas frequências são removidas, apenas ficam as baixas frequências (passam as baixas) e a imagem fica sem detalhes.
- Isto corresponde a um filtro passa-baixas.

Efeito da Rotação