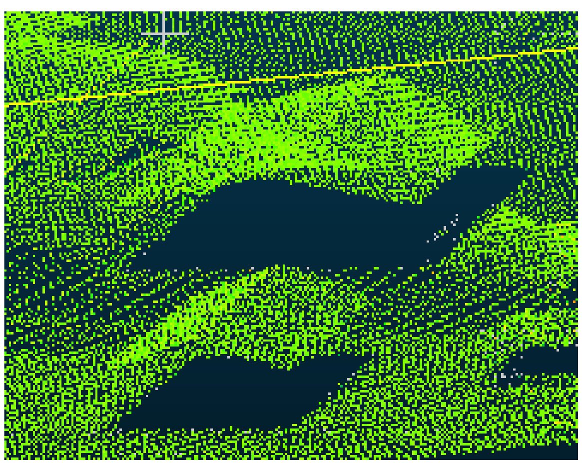
PROCESSAMENTO DE NUVEM DE PONTOS 3D
CGEO- 7028

Extração de descritores 3D

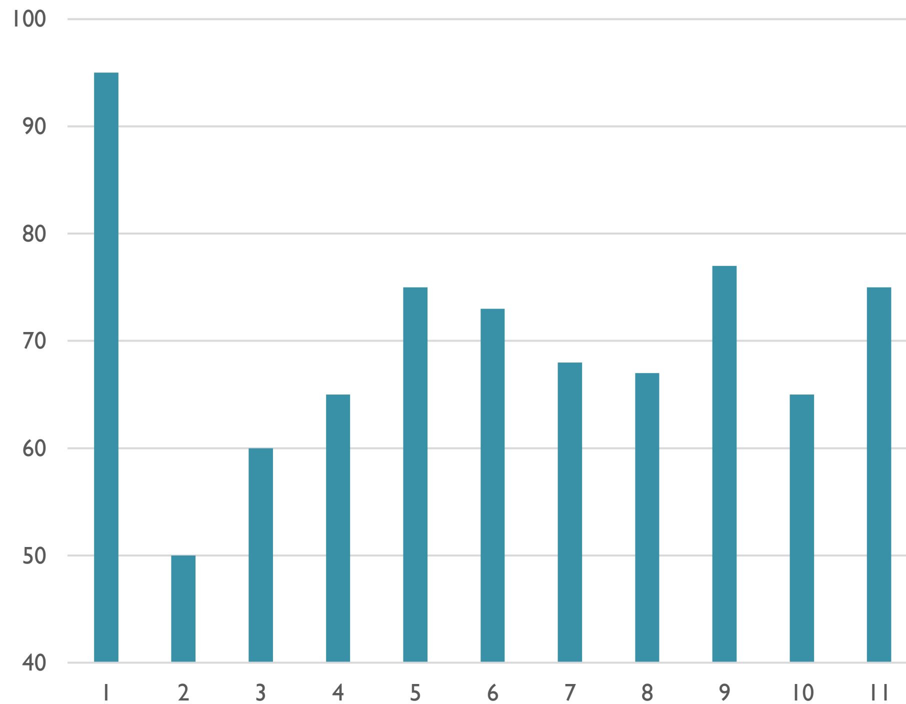


UFPR – Departamento de Geomática
Prof. Jorge Centeno
2023

Revisão de matemática

Valores de vários pontos

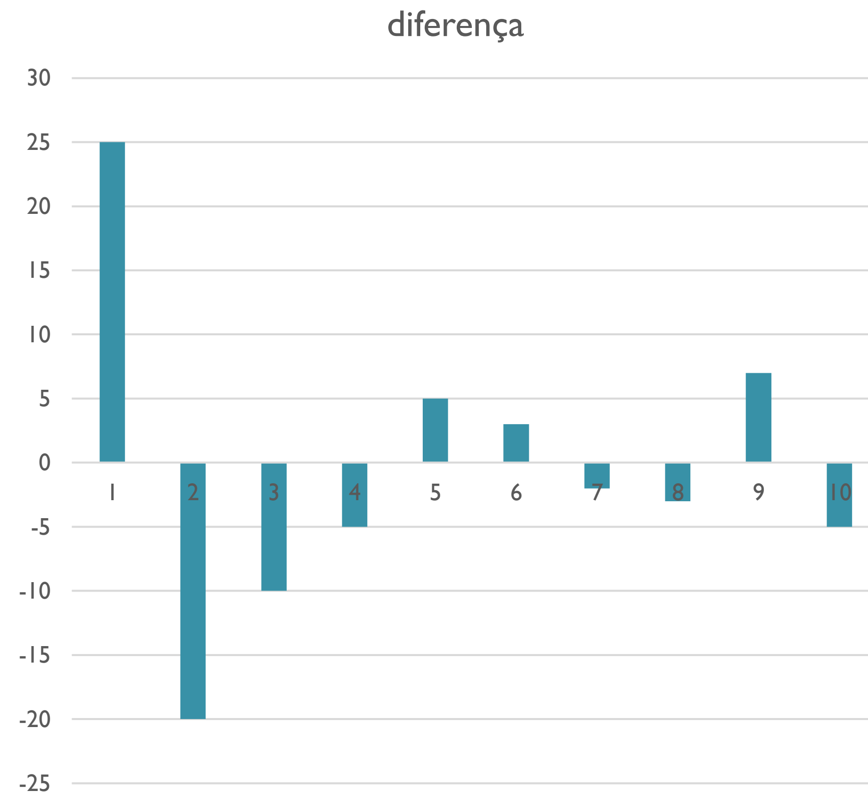
p	valores
1	95
2	50
3	60
4	65
5	75
6	73
7	68
8	67
9	77
10	65
11	75



Média=70 mínimo=50 máximo=95 faixa=50-95: 45 valores

Diferença em relação à média

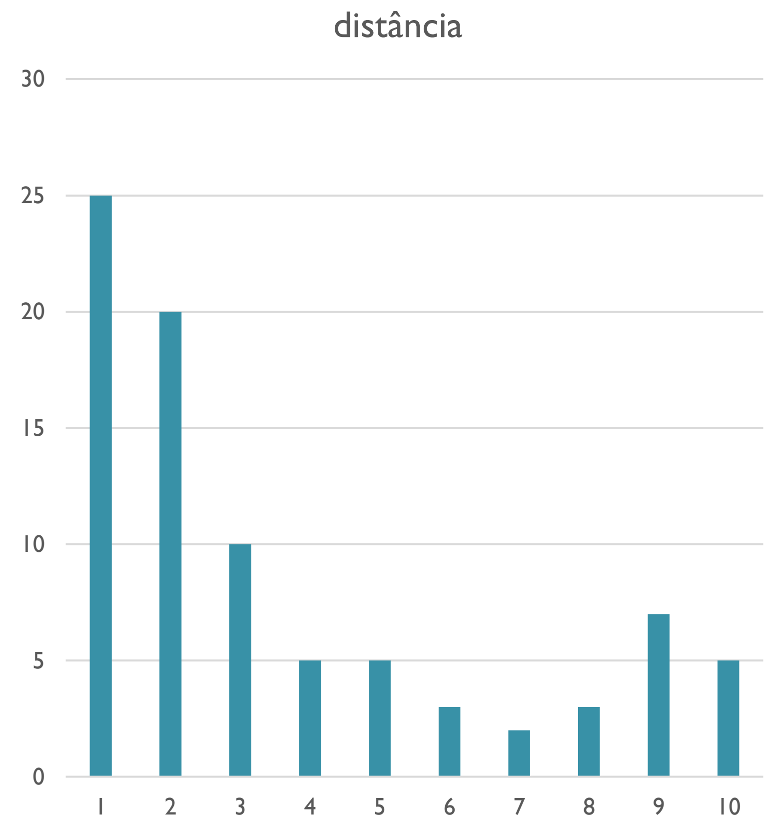
p	valores	diferença
1	95	25
2	50	-20
3	60	-10
4	65	-5
5	75	5
6	73	3
7	68	-2
8	67	-3
9	77	7
10	65	-5
11	75	5
media	70	0



Valores se cancelam e a soma é nula! Não informa a dispersão!

Diferença ao quadrado (distância)

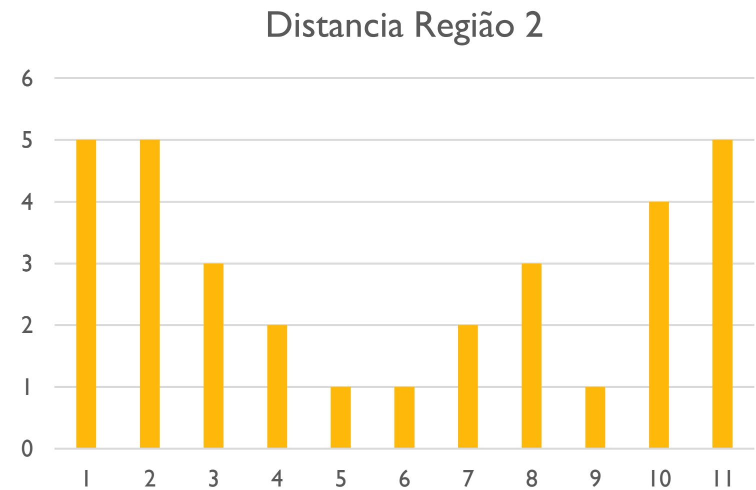
p	valores	dif	dif^2	distância
1	95	25	625	25
2	50	-20	400	20
3	60	-10	100	10
4	65	-5	25	5
5	75	5	25	5
6	73	3	9	3
7	68	-2	4	2
8	67	-3	9	3
9	77	7	49	7
10	65	-5	25	5
11	75	5	25	5
média	70	0	117,82	8,18



Distância à média = 8,18

Outro conjunto

p	valores	diferença	dif^2	distância
1	75	5	25	5
2	75	5	25	5
3	73	3	9	3
4	72	2	4	2
5	69	-1	1	1
6	71	1	1	1
7	68	-2	4	2
8	67	-3	9	3
9	71	1	1	1
10	74	4	16	4
11	65	-5	25	5
media	70,90	0,91	10,91	2,1



A dispersão é menor...

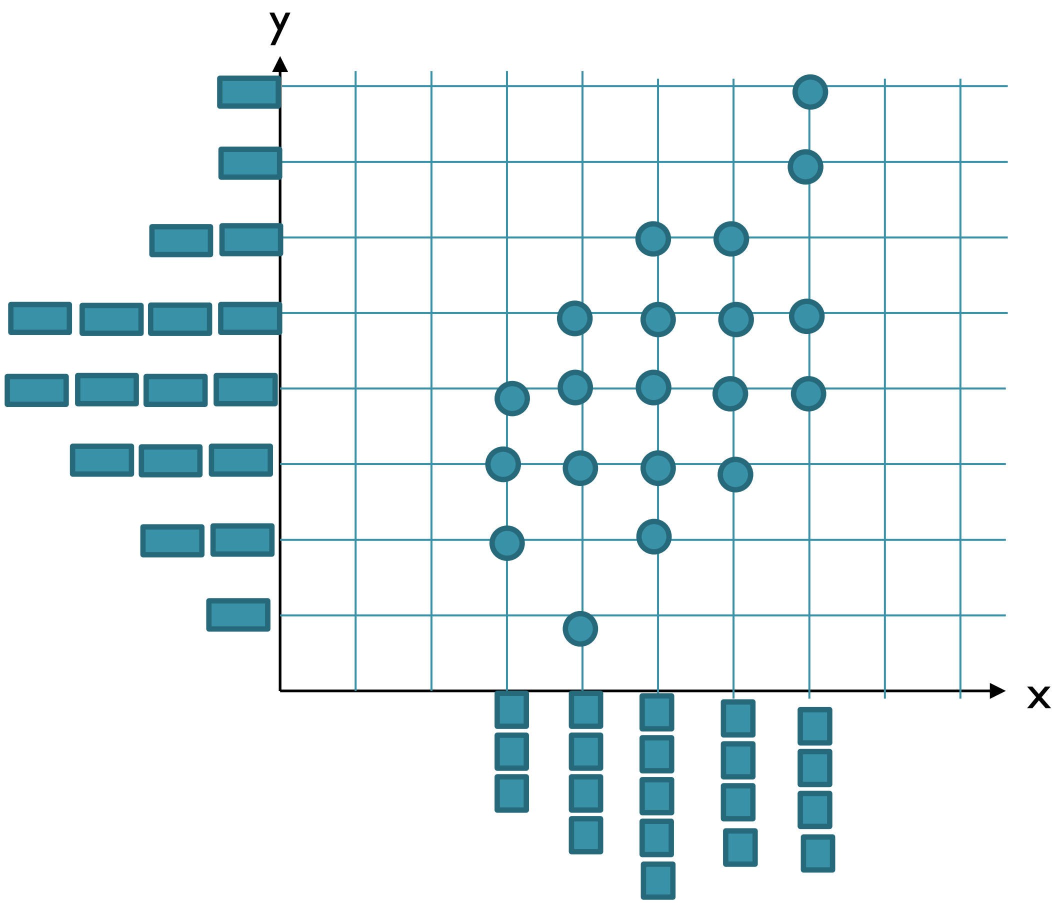
Variância e desvio padrão

- Dados os n valores x e sua média $\bar{x}$
- A variância (s^2) e o desvio padrão s

$$s^2 = \frac{\sum(x-\bar{x})^2}{n-1} \qquad s = \sqrt{\frac{\sum(x-\bar{x})^2}{n-1}}$$

- $(x-\bar{x})^2$ é a distância!

Em 2D



Estatísticas de duas variáveis

Dadas duas variáveis x e y, podemos calcular suas médias e os valores do desvio padrão, ou a variância, de cada uma delas.

Note que aqui temos a diferença ao quadrado.

$$s^2 = \frac{\sum(x - \bar{x})^2}{n - 1} \qquad s = \sqrt{\frac{\sum(x - \bar{x})^2}{n - 1}}$$

Também podemos calcular a covariância entre as variáveis.

$$COV(X,Y) = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \bar{X}\right)\left(Y_i - \bar{Y}\right)}{n-1}$$

Covariâncias

$$COV(X,Y) = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)\left(Y_i - \overline{Y}\right)}{n-1}$$

No cálculo da covariância se calcula o produto das diferenças em relação à média (considerando o sinal!) da combinação de duas variáveis x e y.

O que ocorre quando ...

$\left(X_i - \overline{X}\right)$ >0 e $\left(Y_i - \overline{Y}\right)$ >0

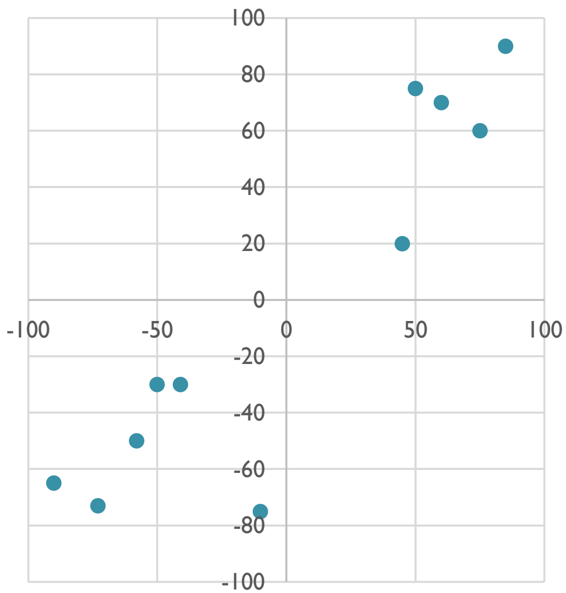
$\left(X_i - \overline{X}\right)$ <0 $\left(Y_i - \overline{Y}\right)$ <0

$\left(X_i - \overline{X}\right)$ >0 e $\left(Y_i - \overline{Y}\right)$ <0

$\left(X_i - \overline{X}\right)$ <0 $\left(Y_i - \overline{Y}\right)$ >0

Mesmo sinal vs. sinais trocados

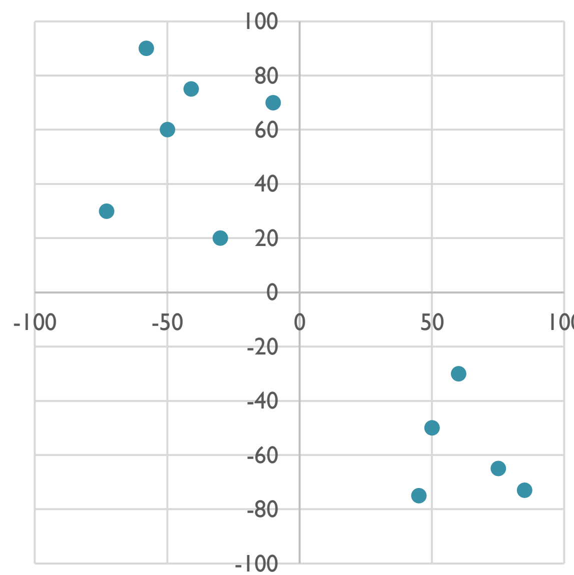
x	y
85	90
50	75
60	70
45	20
75	60
-73	-73
-58	-50
-41	-30
-10	15
-90	-65
-50	-75



Sempre positivo

(-A)* (-B)>0

A*B>0



x	y
85	-73
50	-50
60	-30
45	-75
75	-65
-73	15
-58	90
-41	75
-10	70
-90	20
-50	60

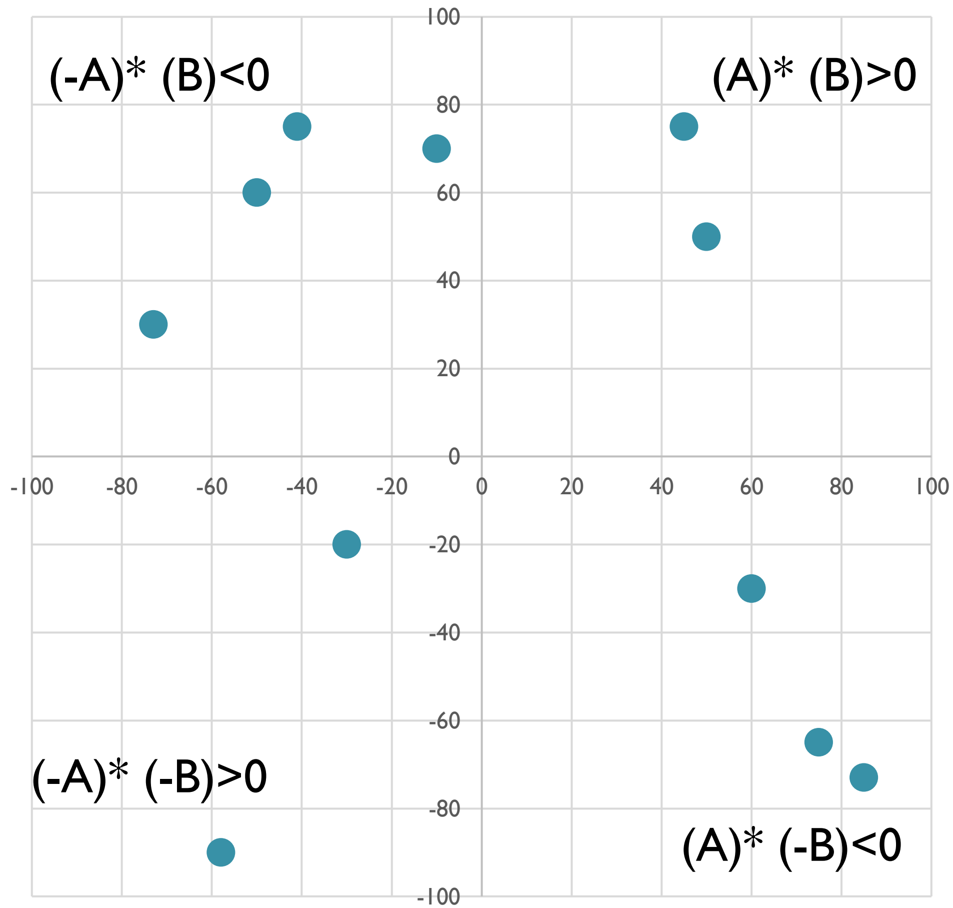
Sempre negativo

(-A)* B<0

A*(-B)<0

E se ocorre de tudo?

x	y
85	-73
50	50
60	-30
45	75
75	-65
-73	30
-58	-90
-41	75
-10	70
-30	-20
-50	60



Matriz variância -covariância

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \mathrm{Var}(X) & \mathrm{Cov}(X,Y) & \mathrm{Cov}(X,Z) \\ \mathrm{Cov}(X,Y) & \mathrm{Var}(Y) & \mathrm{Cov}(Y,Z) \\ \mathrm{Cov}(X,Z) & \mathrm{Cov}(Y,Z) & \mathrm{Var}(Z) \end{bmatrix}$$

O que tem na diagonal principal?

Matriz simétrica e quadrada

Correlação

$$\mathrm{corr}(X,Y) = \frac{\mathrm{cov}(X,Y)}{\sigma_X \sigma_Y}$$

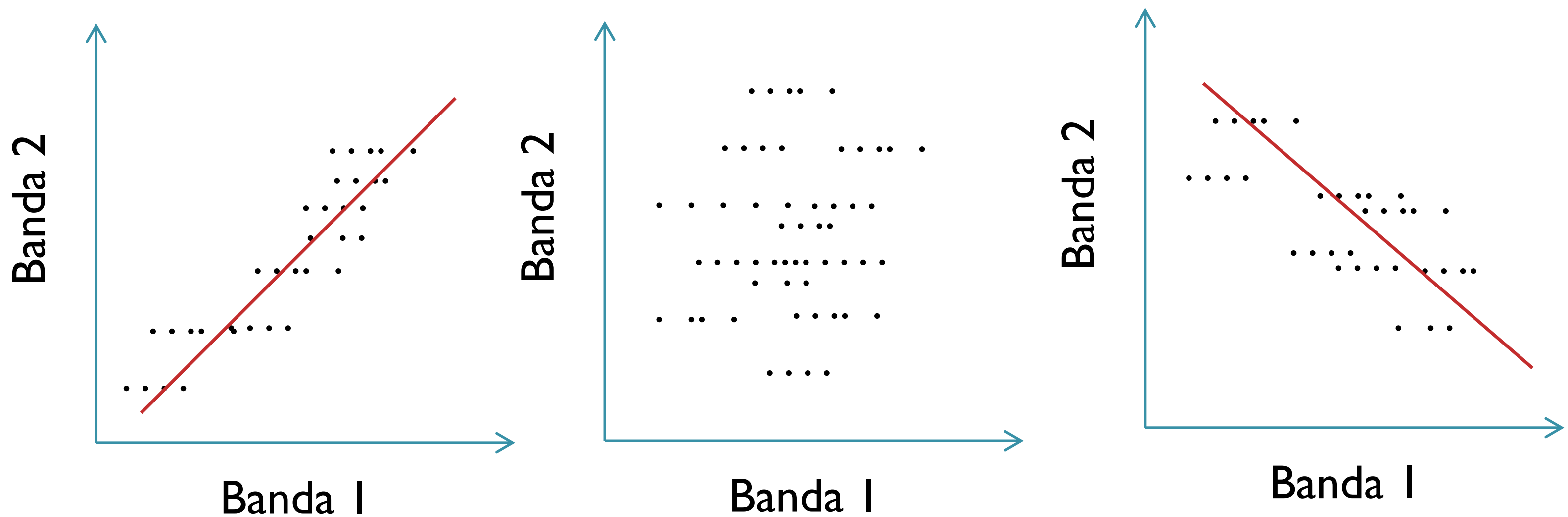
- Qual seria a correlação entre X e X?

- O que ocorre se cov(X,Y)>0?
- O que ocorre se cov(X,Y)=0?
- O que ocorre se cov(X,Y)<0?

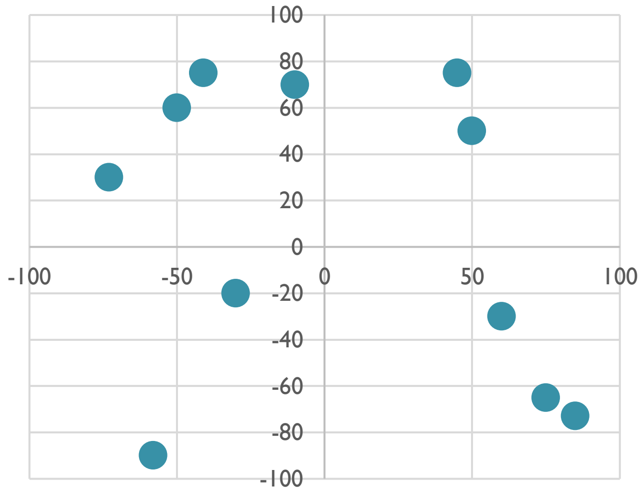
A correlação é um índice que descreve a dependência linear entre duas variáveis e serve como indicador do grau de similaridade entre este par de variáveis.

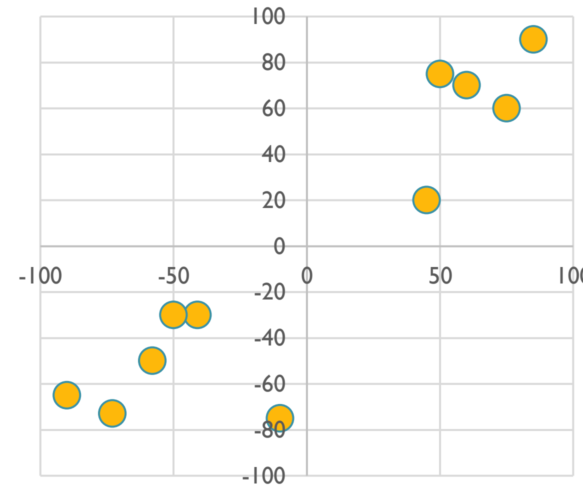
Correlação

Correlação positiva,negativa ou zero?



Compare a correlação





média de (x-mx)(y-my)=-958,64

Corr= -0,25

média de (x-mx)(y-my)=3504,90

Corr= 0,83

caso 2D

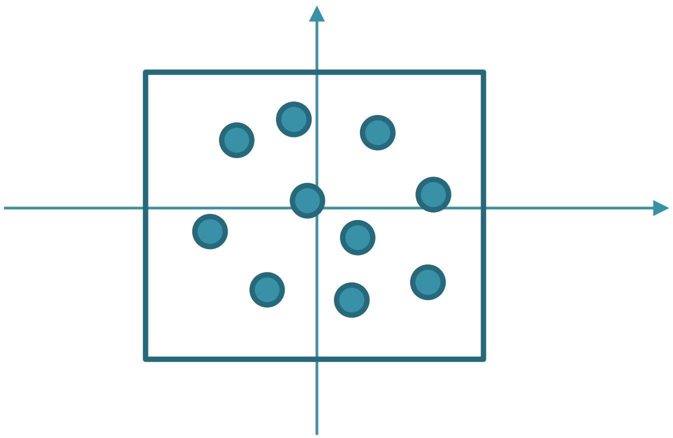
Como seria a distribuição dos pontos... se:

- $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ e $\sigma_{12} = 0$?

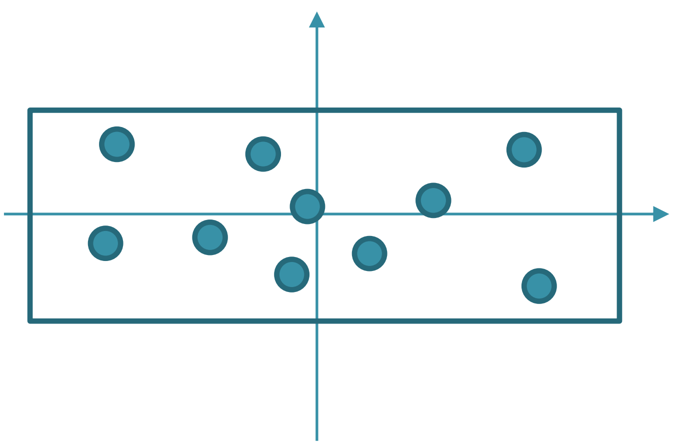
Ou

- $\sigma_1^2 > \sigma_2^2$ e $\sigma_{12} = 0$?

- $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ e $\sigma_{12} = 0$?

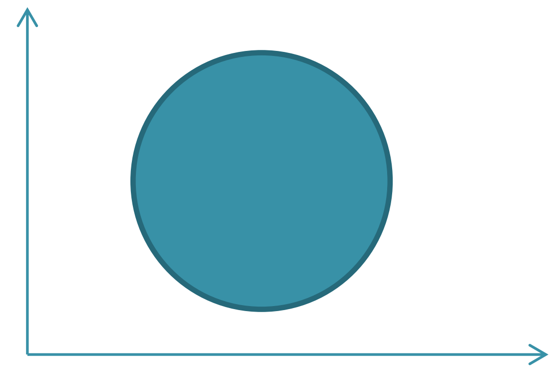


- $\sigma_1^2 > \sigma_2^2$ e $\sigma_{12} = 0$?

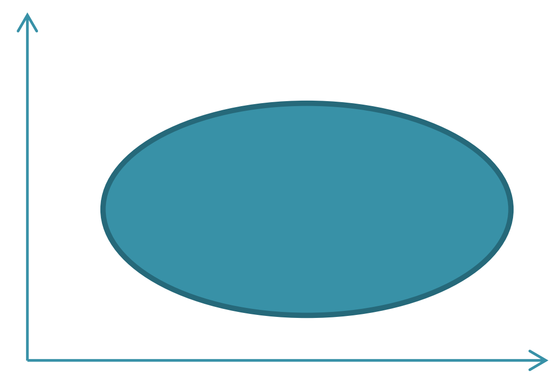


No caso 2D

$\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ e $\sigma_{12} = 0$?



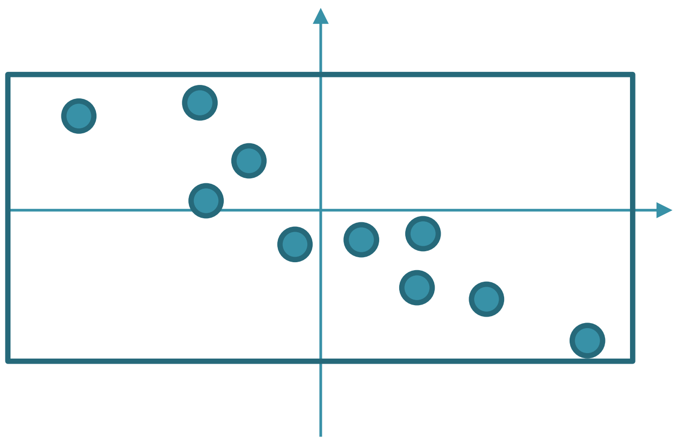
$\sigma_1^2 > \sigma_2^2$ e $\sigma_{12} = 0$?



No caso 2D

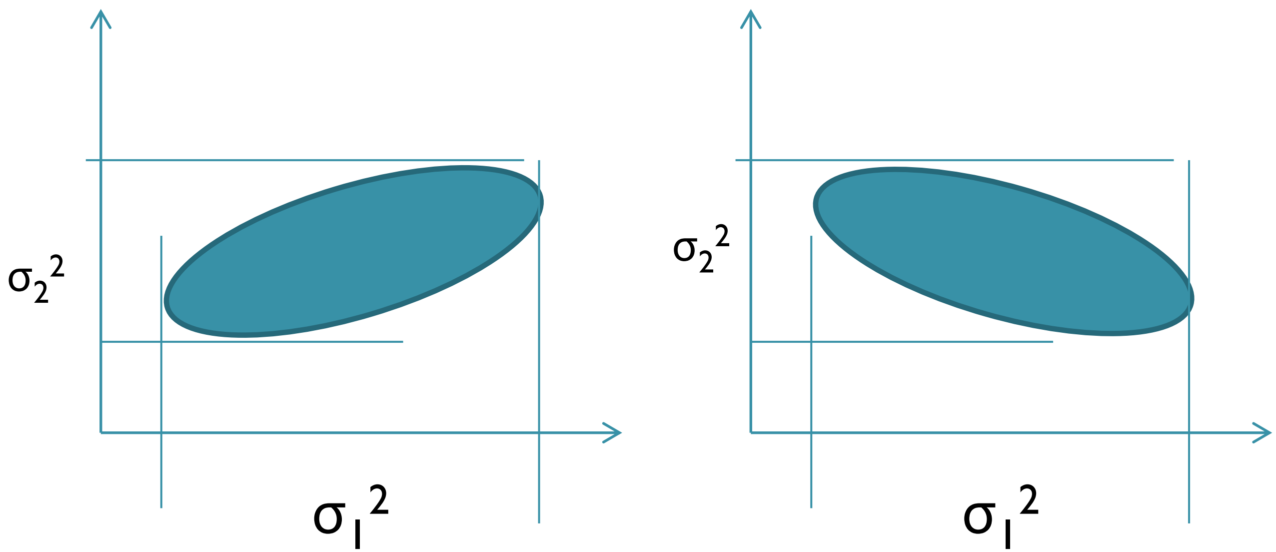
E se:

- $\sigma_1^2 > \sigma_2^2$ e σ_{12} diferente de zero?



No caso 2D

$\sigma_1^2 > \sigma_2^2$ e σ_{12} diferente de zero?



Depende de σ_{12}

Pode ser escrita como...

$$\rho = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i - \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)}{\sqrt{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2\right)}\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2 - \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)^2\right)}$$

AUTOVALORES
&
AUTOVETORES

Autovalor

Definição: *Seja* **A** *uma matriz quadrada e a matriz identidade , os escalares que satisfazem a equação polinomial (que é chamada de equação característica de (***A***):*

$$\det\left[A-\lambda I\right]=0 \quad ou \quad \left|A-\lambda I\right|=0$$

Os escalares **λ** *são chamados de autovalores da matriz.*

exemplo

$$M = \begin{bmatrix} 510.2 & 559.4 & -335.0 \\ 559.4 & 647.2 & 78.4 \\ -335.0 & 78.4 & 9701.2 \end{bmatrix}$$

$$M - \lambda I = \begin{bmatrix} 510.2 & 559.4 & -335.0 \\ 559.4 & 647.2 & 78.4 \\ -335.0 & 78.4 & 9701.2 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$M - \lambda I = \begin{bmatrix} 510.2 & 559.4 & -335.0 \\ 559.4 & 647.2 & 78.4 \\ -335.0 & 78.4 & 9701.2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

$$M - \lambda I = \begin{bmatrix} 510.2-\lambda & 559.4 & -335.0 \\ 559.4 & 647.2-\lambda & 78.4 \\ -335.0 & 78.4 & 9701.2-\lambda \end{bmatrix}$$

$$\det(M - \lambda I) = 0$$

Lembra como calcular?

solução

$$M - \lambda I = \begin{bmatrix} 510.2-\lambda & 559.4 & -335.0 \\ 559.4 & 647.2-\lambda & 78.4 \\ -335.0 & 78.4 & 9701.2-\lambda \end{bmatrix}$$

det(M- I*λ)= (510.2- λ)* (647.2- λ) *(9701.2- λ)
+ 559.4*78.4*(-335)
+ 559.43*78.40*(-335)
– (510.2- λ)* 78.4*78.4
– (-335)* (647.2- λ) *(-335)
– (9701.2- λ)* 599.4*599.4

Det(M- I*λ)= 0

$a* \lambda^3 + b* \lambda^2 + c* \lambda + d = 0$

solução

Achar as raízes da equação:

Eq: $a^* \lambda^3 + b^* \lambda^2 + c^* \lambda + d = 0$

- $\lambda 1 = 97047.88$
- $\lambda 2 = 11302.26$
- $\lambda 3 = 104.96$

Autovetor

- ***definição**: Seja uma matriz A com dimensão kxk e λ seus autovalores. Se x é um vetor não nulo tal que:*
  - $A\, x = \lambda\, x$
- *então x é chamado de autovetor (vetor característico) da matriz associado ao autovalor λ .*

Exemplo: para matriz quadrada A

Dada a matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

A equação a ser resolvida: det(A- λ*I)=*det(M)*

$$\mathrm{M} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{M} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 1 & 3-\lambda \end{bmatrix}$$

Det(M)= $\det \begin{bmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 1 & 3-\lambda \end{bmatrix}$

Det(M)=(1- λ)*(3- λ) -0 = (1- λ)*(3- λ)

OS AUTOVALORES são as raízes: λ=1 e λ=3

Exemplo: para matriz quadrada A

OS AUTOVALORES da matriz A são: λ=1 e λ=3

Para cada autovalor podemos calcular um autovetor, resolvendo A*x = λ *x, onde x é um vetor

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \lambda * \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Para λ=1:

$$\begin{bmatrix} x_1 & 0 \\ x_1 & 3x_2 \end{bmatrix} = 1 \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

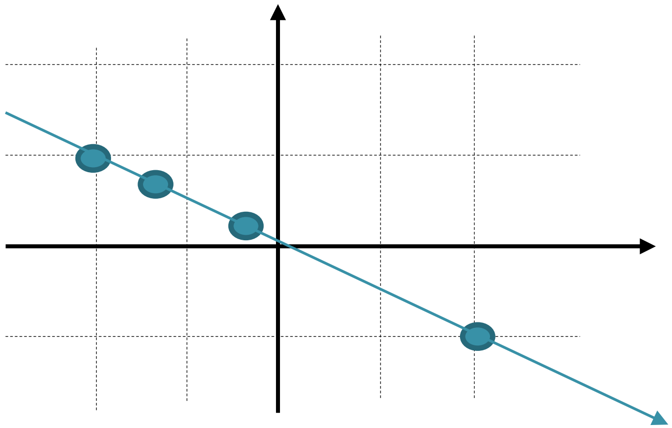
que fornece duas equações:

a) $x_1 = x_1$

b) $x_1+3x_2=x_2$

Resolvendo (a) ... $x_2 = ½\, x_1$

Que tem infinitas soluções, alinhadas



Teor de informação

A soma dos autovalores de uma matriz é igual ao traço da matriz

$$M = \begin{bmatrix} {V_1}^2 & c_{12} & c_{13} \\ c_{12} & {V_2}^2 & c_{23} \\ c_{13} & c_{23} & {V_3}^2 \end{bmatrix} \qquad traço(M) = {V_1}^2 + {V_2}^2 + {V_3}^2$$

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = {V_1}^2 + {V_2}^2 + {V_3}^2$$

A soma dos autovalores de uma matriz é igual à soma das variâncias, que explicam a dispersão.

Quanto explica cada autovalor?

$$I(i) = \frac{\lambda_i}{traço(M)} = \frac{\lambda_i}{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3}$$

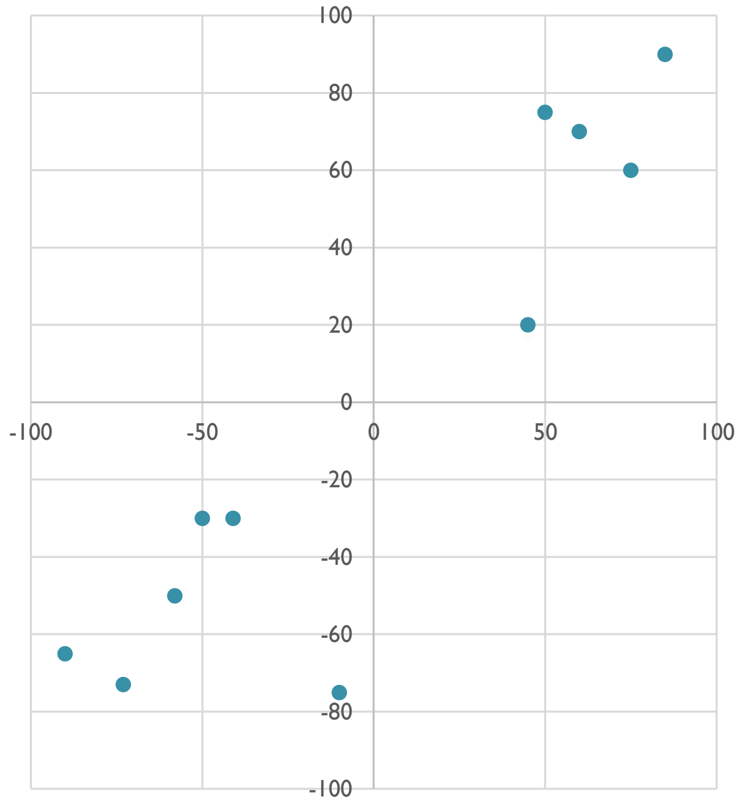
Podemos ordenar os autovalores (e consequentemente os autovetores) em função da variância explicada

$$\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3$$

Exemplo

$$M = \begin{bmatrix} 4.204,5 & 3.993,3 \\ 3.993,3 & 4.130,5 \end{bmatrix}$$

x	y
85	90
50	75
60	70
45	20
75	60
-73	-73
-58	-50
-41	-30
-10	15
-90	-65
-50	-75



Autovalores

λ_1 =8.160,9

λ_2 = 1740,0

Autovetores

$$v1 = \begin{bmatrix} 0.7038 \\ -0.7104 \end{bmatrix}$$

$$v2 = \begin{bmatrix} -0.7104 \\ -0.7038 \end{bmatrix}$$

Note $v1*v2=0$, são ortogonais

exemplo

$$M = \begin{bmatrix} 4.204,5 & 3.993,3 \\ 3.993,3 & 4.130,5 \end{bmatrix}$$

Autovalores

λ_1 =8.160,9

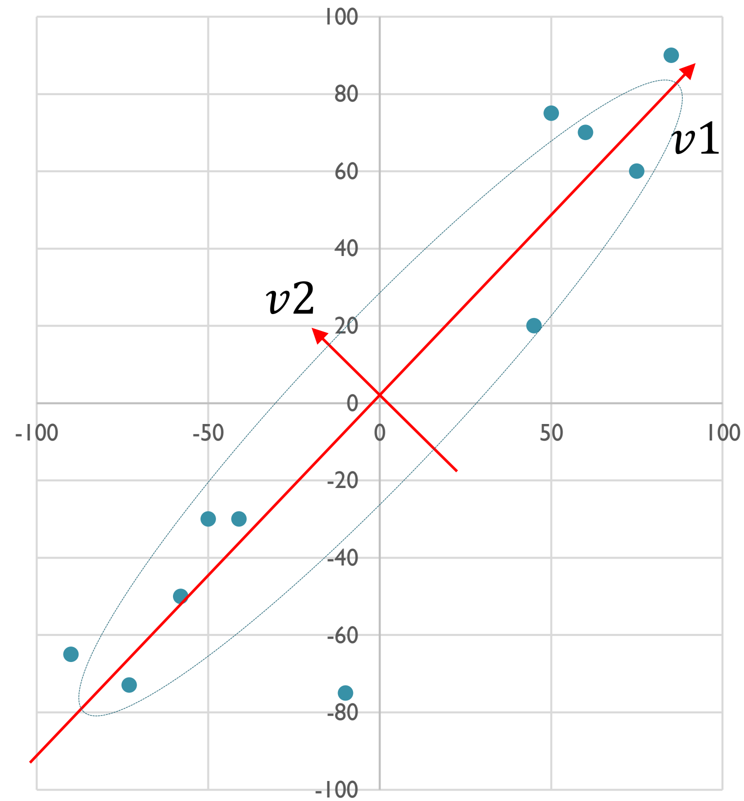
λ_2 = 1.740,0

Autovetores

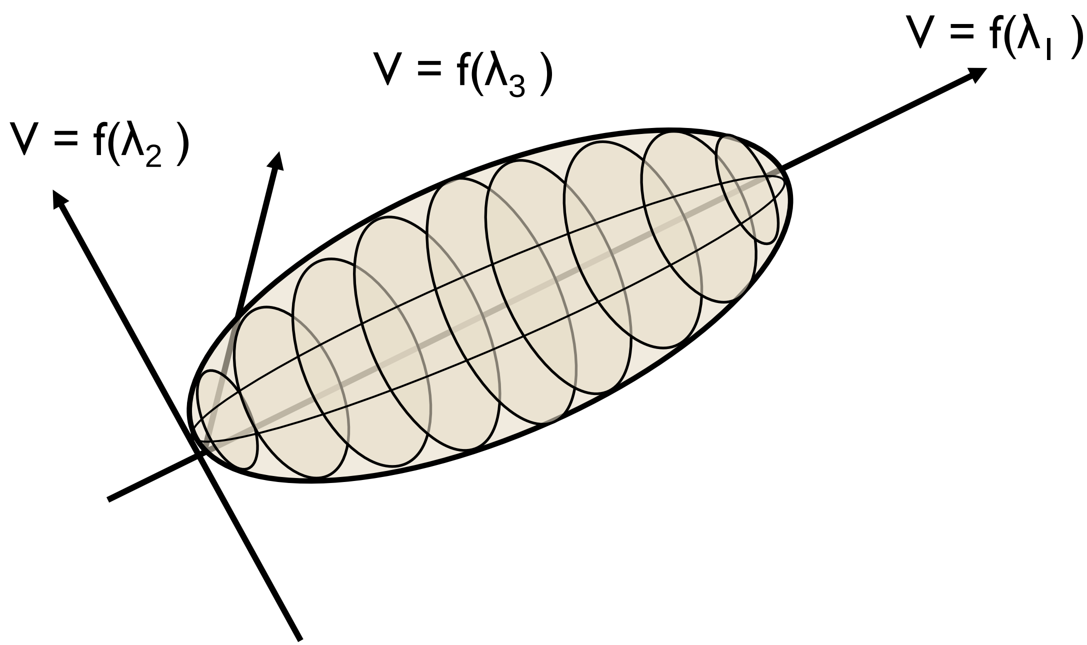
$$v1 = \begin{bmatrix} 0.7038 \\ -0.7104 \end{bmatrix}$$

$$v2 = \begin{bmatrix} -0.7104 \\ -0.7038 \end{bmatrix}$$

$\lambda_1 >> \lambda_2$, maior dispersão na direção do primeiro autovetor



Em 3D



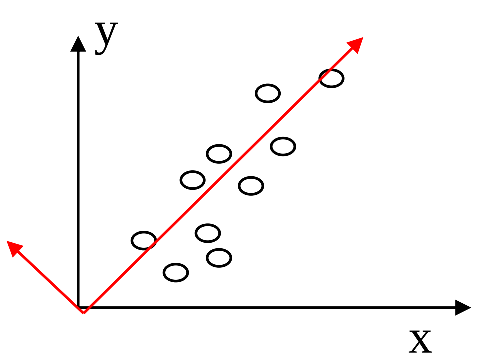
Transformação

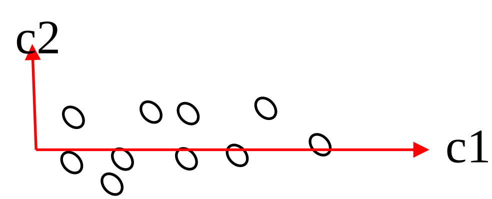
Os dados originais (x,y) podem ser projetados ao longo destes novos eixos, resultando na rotação dos dados para um sistema onde a correlação entre as variáveis é mínima.

$$\begin{bmatrix} c1 \\ c2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{21} & v_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Ou em 3D

$$\begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} & v_{13} \\ v_{21} & v_{22} & v_{23} \\ v_{31} & v_{32} & v_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$





- Features

Se compararmos...

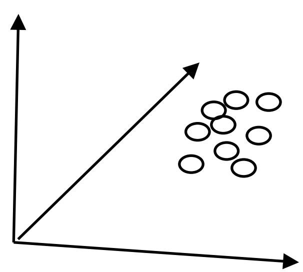
A soma dos autovalores de uma matriz é igual ao traço da matriz

$$S = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = {V_1}^2 + {V_2}^2 + {V_3}^2$$

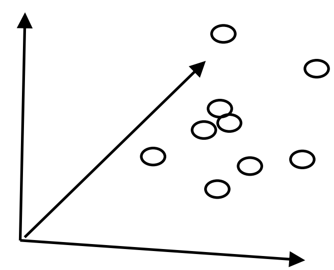
O que significa se dois conjuntos de pontos tem valores diferentes de S? o que representa S em termos da dispersão destes conjuntos?

Sum of eigenvalues: The sum of eigenvalues describes the total variation which is the sum of the squared distances of the points of a neighbourhood from their centroid (Jolliffe, 1986).

Omnivariance: describes how a neighbourhood of points spread inhomogeneously across a 3D volume (Waldhauser, et. al., 2014).



$$O = \sqrt[3]{\lambda_1 \lambda_2 \, \lambda_3}$$



Stefan von der Spek: Semantically enriching point clouds : the case of street level

Entropia / Anisotropia

Eigenentropy: *The feature of eigenentropy a provides a measure of the order or disorder of 3D points within the covariance ellipsoid (Weinmann, et. al., 2014)*

$$E = -\sum_{i=1}^{3} \lambda_i \ln(\lambda_i)$$

Anisotropy: Anisotropy is a measure which is higher if the eigenvectors differ a lot. Anisotropic operations have the potential to discriminate between orientated and non-orientated objects, as oriented objects have a higher anisotropy (Oude Elberink and Maas, 2000).

$$A = \frac{\lambda_1 - \lambda_3}{\lambda_1}$$

Anisotropia:
Mede a diferença normalizada entre o maior e o menor autovalor

Linearity: descreve se o conjuntio pode ser aproximado por uma linha reta. Serve, por exemplo, para modelar cabos. (Waldhauser, et. al., 2014).

$$A = \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{\lambda_1}$$

$$A = 1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_1}$$

Planarity: descreve a suavidade de uma superficie (Waldhauser, et. al., 2014).

$$P = \frac{\lambda_2 - \lambda_3}{\lambda_1}$$

Scattering: descreve o grau de esfericidade de um conjunto de pontos.

$$S = \frac{\lambda_3}{\lambda_1}$$

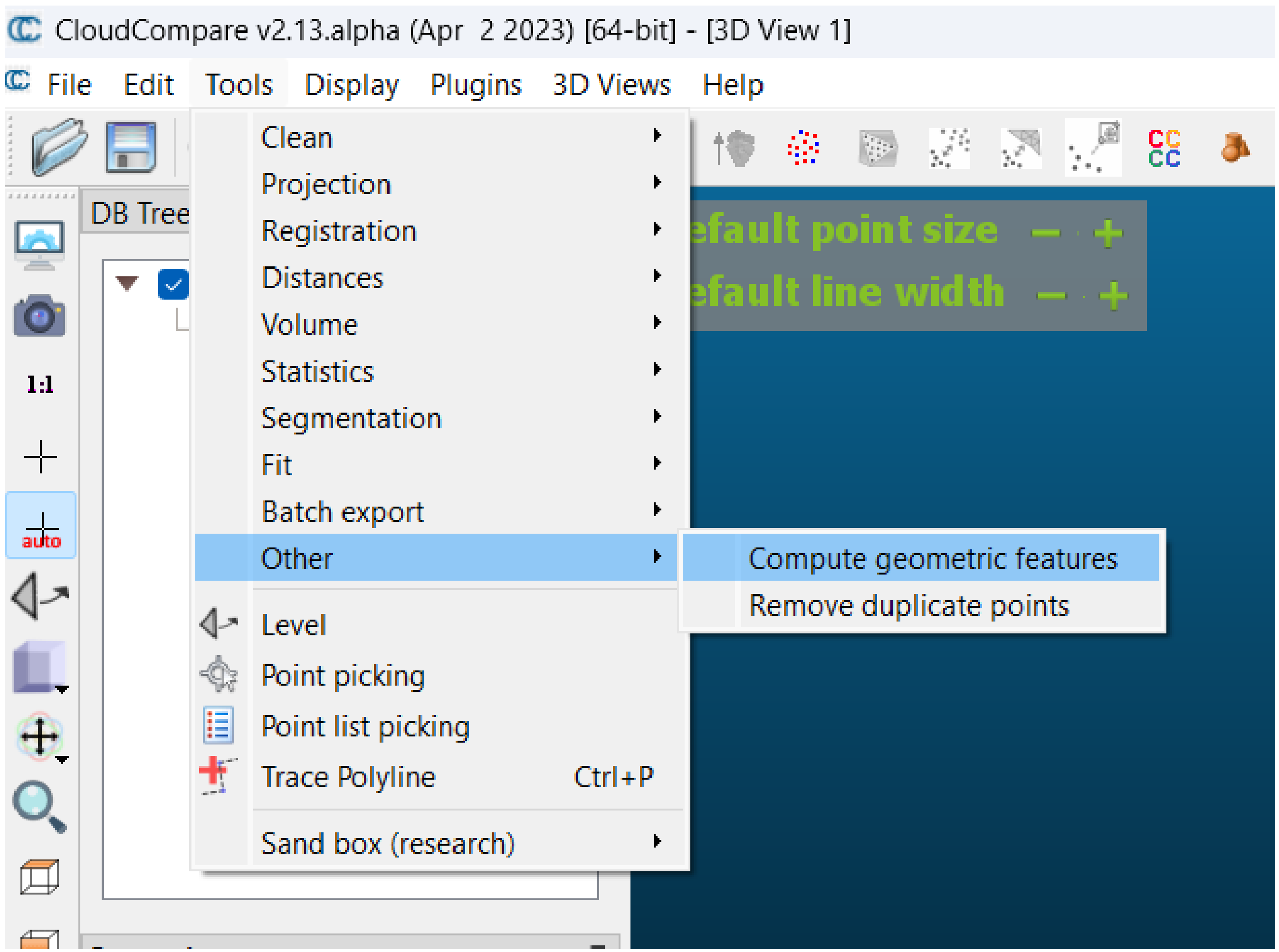
Curvature: The curvature using PCA can be calculated by the ratio between the minimum eigenvalue and the sum of the eigenvalues. This approximates the change of curvature in the neighborhood of a point p (Rusu, 2010).

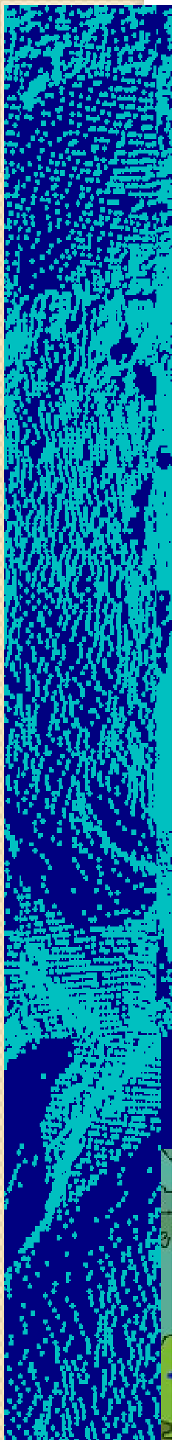
$$C = \frac{\lambda_3}{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3}$$

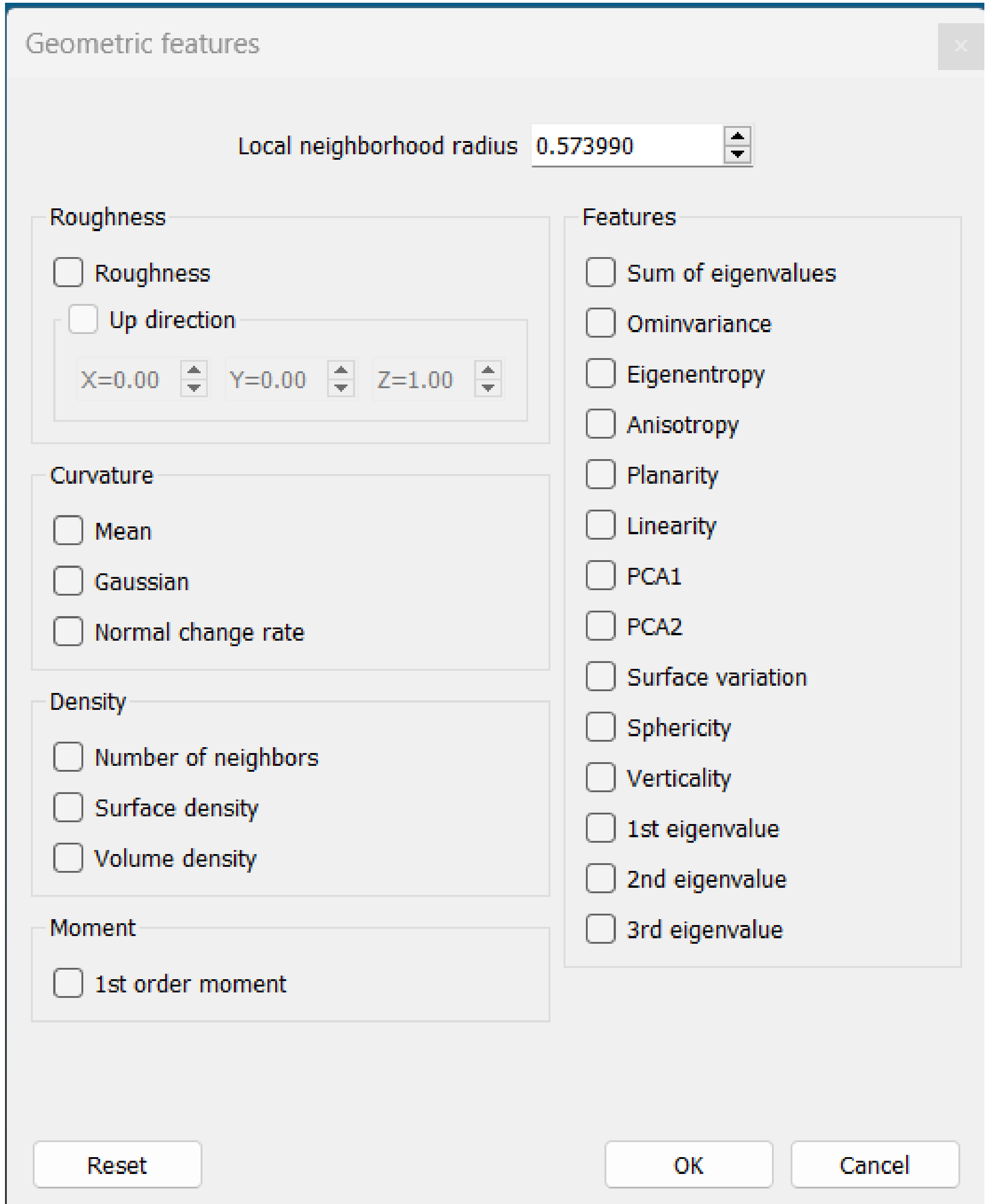
- **Semantically Enriching Point Clouds - the case of street levels.** A Rovers, I de Vreede, M Rook, S Psomadaki, T Nagelkerke, W Quak, SC van der Spek, B Beers, R Voute, E Verbree . *Research output: Book/Report › Report › Professional*
- APE DISTRIBUTION FEATURES FOR POINT CLOUD ANALYSIS - A GEOMETRIC HISTOGRAM APPROACH ON MULTIPLE SCALES R. Blomley , M. Weinmann , J. Leitloff , B. Jutzi

- bonus

No Cloud Compare






Geometric features
Local neighborhood radius 0.573990
Roughness
Roughness
Up direction
X=0.00
Y=0.00
Z=1.00
Curvature
Mean
Gaussian
Normal change rate
Density
Number of neighbors
Surface density
Volume density
Moment
1st order moment
Features
Sum of eigenvalues
Ominvariance
Eigenentropy
Anisotropy
Planarity
Linearity
PCA1
PCA2
Surface variation
Sphericity
Verticality
1st eigenvalue
2nd eigenvalue
3rd eigenvalue
Reset
OK
Cancel