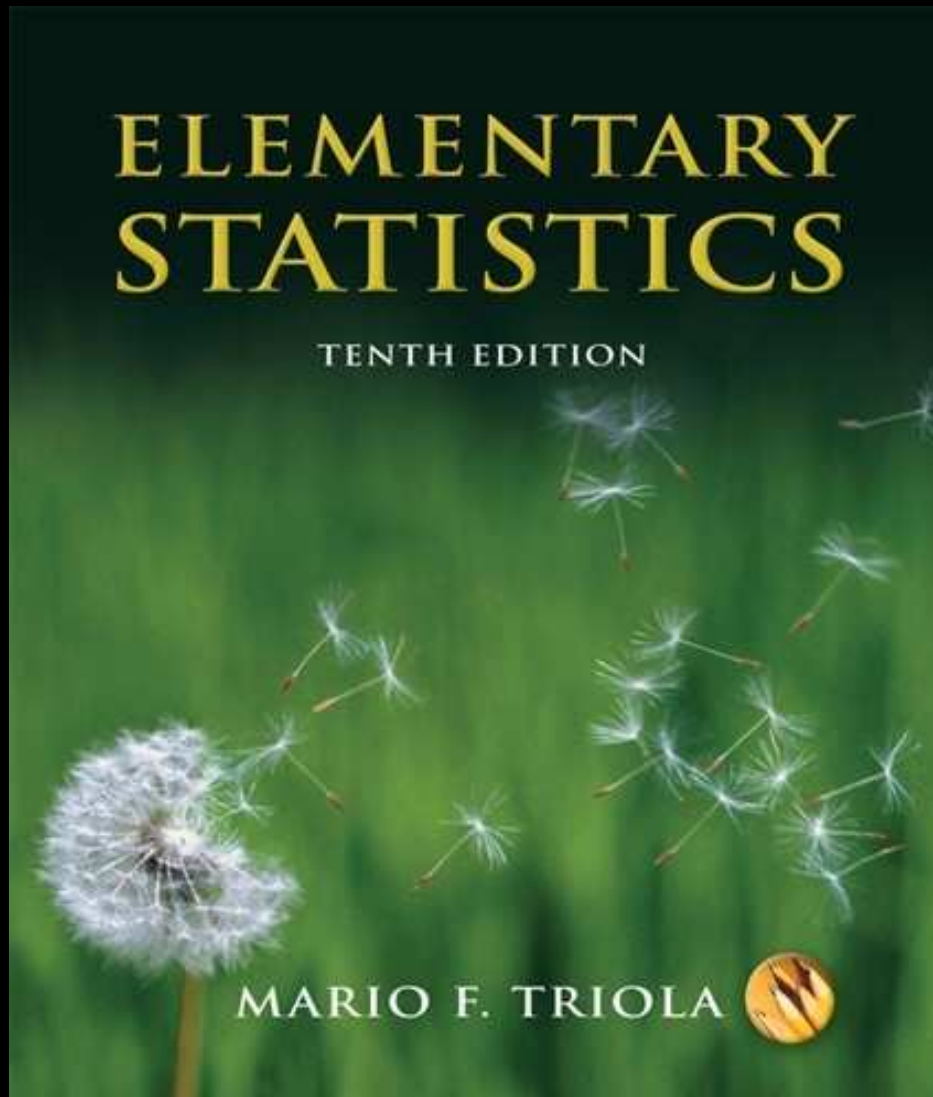


Notas de Aula



Estatística Elementar 10ª Edição

by Mario F. Triola

Tradução: Denis Santos

Capítulo 4

Probabilidade

4-1 Visão Geral

4-2 Fundamentos

4-3 Regra da Adição

4-4 Regra da Multiplicação: Pontos Básicos

4-5 Regra da Multiplicação: Complements e Probabilidade Condicional

4-6 Probabilidades Através de Simulações

4-7 Contagens

Seção 4-1

Visão Geral



Created by Tom Wegleitner, Centreville, Virginia



Visão Geral

Regra do Evento Raro para Inferência Estatísticas:

Se, sob uma dada hipótese, a probabilidade de um particular evento observado é extremamente pequena, nós concluimos que a hipótese provavelmente não é correta.

Estatísticos a chamam de **regra do evento raro para inferência estatísticas**.

Seção 4-2

Fundamentos



Created by Tom Wegleitner, Centreville, Virginia



Ponto Chave

Esta seção introduz os conceitos básicos de **Probabilidade** de um evento. Três diferentes métodos para encontrar probabilidades serão apresentados.

O objetivo principal desta seção é aprender como **interpretar** valores probabilísticos.

Definições

❖ Evento

qualquer conjunto de resultados ou saídas de um procedimento.

❖ Evento Simples

uma saída ou evento que não pode ser decomposto em um componente mais simples.

❖ Espaço Amostral

para um dado procedimento, consiste de todos os possíveis eventos **simples**; ou seja, o espaço amostral consiste de todos os possíveis resultados que não podem ser decompostos.

Notação para Probabilidades

P — denota uma probabilidade.

$A, B, \text{ e } C$ - denota eventos específicos.

$P(A)$ - denota a probabilidade de ocorrer o evento A .

Regras Básicas para o Cálculo de Probabilidades

Regra 1: Aproximação pela Frequência Relativa

Conduza (ou observe) um procedimento um número fixo de repetições, e conte o número de vezes que o evento A ocorre. Baseado nestes resultados, $P(A)$ é **estimado** como se segue:

$$P(A) = \frac{\text{número de vezes que } A \text{ ocorre}}{\text{número total de repetições}}$$

Regras Básicas para o Cálculo de Probabilidades – cont.

Regra 2: Abordagem Clássica da Probabilidade (Requer Eventos Equiprováveis)

Assume que um dado procedimento tem n eventos simples distintos e que **cada um destes eventos tem a mesma chance de ocorrência**. Se o evento A pode ocorrer em s destas n maneiras, então

$$P(A) = \frac{s}{n} = \frac{\text{número de eventos simples pertencentes a } A}{\text{número total de eventos simples}}$$

Regras Básicas para o Cálculo de Probabilidades – cont.

Regra 3: Probabilidades Subjetivas

$P(A)$, a probabilidade de ocorrência do evento A , é **estimada** utilizando-se o conhecimento de circunstâncias relevantes.

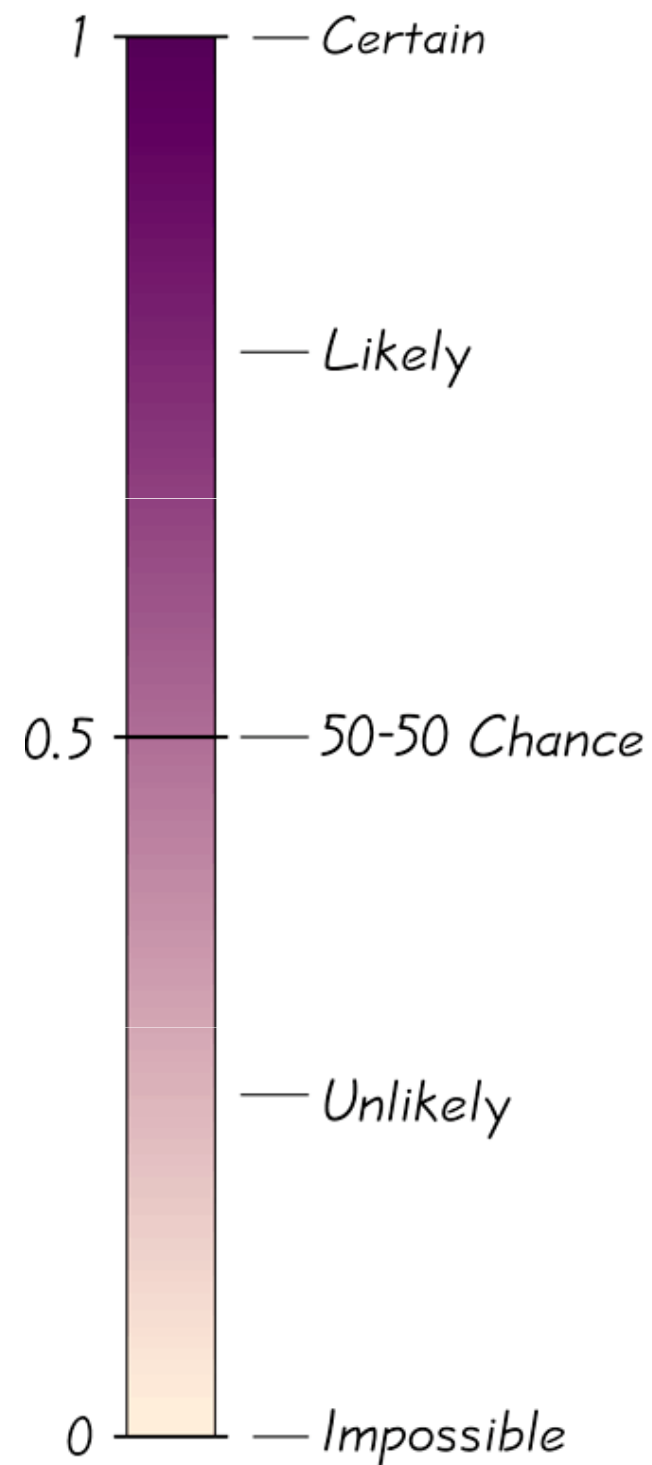
Lei dos Grandes Números

Se um experimento é repetido várias vezes, a frequência relativa (da Regra 1) de um evento tende para a probabilidade de ocorrência deste evento.

Limites Probabilísticos

- ❖ A probabilidade de um evento impossível é 0.
- ❖ A probabilidade de um evento que é certo é 1.
- ❖ Para qualquer evento A , a probabilidade de A é um número entre 0 e 1, inclusive.
Ou seja, $0 \leq P(A) \leq 1$.

Possíveis Valores de Probabilidade



Definição

O complemento do evento A , denotado $\bar{A}$, consiste de todos os resultados do espaço amostral que **não** pertencem à A .

Arredondamento de Probabilidades

Queo expressar probabilidades, ou informe a fração ou número decimal **exatos** ou arredonde o resultado decimal para três dígitos significativos. (**Sugestão**: quando a probabilidade não é uma fração simples como $\frac{2}{3}$ ou $\frac{5}{9}$, expresse-a como decimal, para que a quantidade seja melhor compreendida.)

Definições

A **razão de chances** do evento A ocorrer é a razão $P(A)/P(\bar{A})$, usualmente expressa na forma **a:b** (ou “**a** para **b**”), onde a e b são inteiros sem fatores em comum.

The actual odds in favor of evento A occurring are the reciprocal of the actual odds against the evento. If the odds against A are **a:b**, then the odds in favor of A are **b:a**.

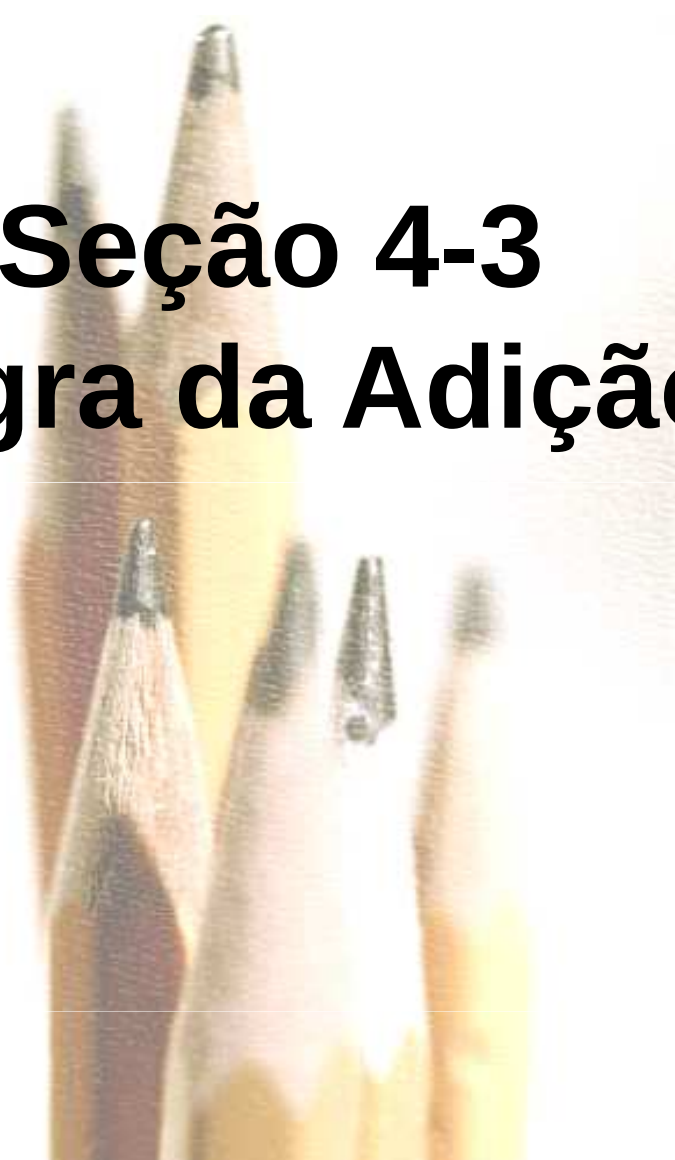
The payoff odds against evento A represent the ratio of the net profit (if you win) to the amount bet.

$$\text{payoff odds against evento } A = (\text{net profit}) : (\text{amount bet})$$

Recapitulando

Nesta seção nós apresentamos:

- ❖ **Regra do evento raro para inferência estatística.**
- ❖ **Regras para calcular probabilidades.**
- ❖ **Lei dos Grandes Números.**
- ❖ **Eventos complementares.**
- ❖ **Arredondando probabilidades.**
- ❖ **Razão de chance.**



Seção 4-3

Regra da Adição

Created by Tom Wegleitner, Centreville, Virginia



Ponto Chave

O objetivo principal desta seção é apresentar a **Regra da Adição** como uma ferramenta para encontrar probabilidades que podem ser expressas por $P(A \text{ ou } B)$, que é a probabilidade de ocorrer tanto o evento A quanto o evento B (ou ambos ocorrerem) em função de eventos simples de um experimento aleatório.

Definição

Eventos Compostos

qualquer evento combinando 2 ou mais eventos simples.

Notação

$P(A \text{ ou } B) = P$ (em uma única realização do experimento, ocorrer o evento A ou o evento B ou ambos)

Regra Geral para Eventos Compostos

Quando calculamos a probabilidade de que ocorre o evento A ou o evento B , temos que calcular o número total de maneiras que A pode ocorrer e o número total de maneiras que B pode ocorrer, mas **calcular estes totais de tal maneira que um resultado não seja contabilizado mais de uma vez.**

Eventos Compostos

Regra da Adição Formal

$$P(A \text{ ou } B) = P(A) + P(B) - P(A \text{ e } B)$$

onde $P(A \text{ e } B)$ denota a probabilidade de A e B ocorrerem ao mesmo tempo em uma realização do experimento.

Regra da Adição Intuitiva

Para calcular $P(A \text{ ou } B)$, some o número de maneiras que o evento A pode ocorrer com o número de maneiras que o evento B pode ocorrer, **de tal maneira que cada resultado possível seja contabilizado apenas uma vez.** $P(A \text{ ou } B)$ é igual a esta soma dividida pelo número total de elementos do espaço amostral.

Definição

Eventos A e B are **disjuntos** (ou **mutuamente exclusivo**) se eles não podem ocorrer ao mesmo tempo. (Ou seja, eventos disjuntos não têm interseção.)

Total Area = 1

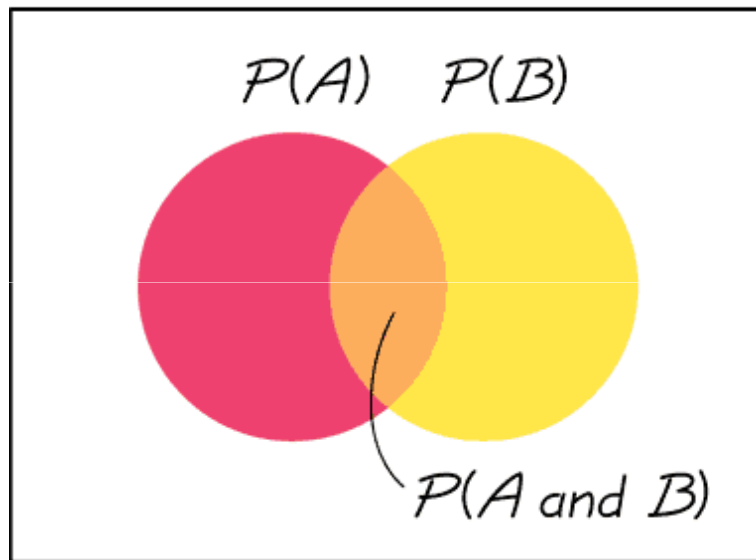


Diagrama de Venn para eventos que não são disjuntos

Total Area = 1

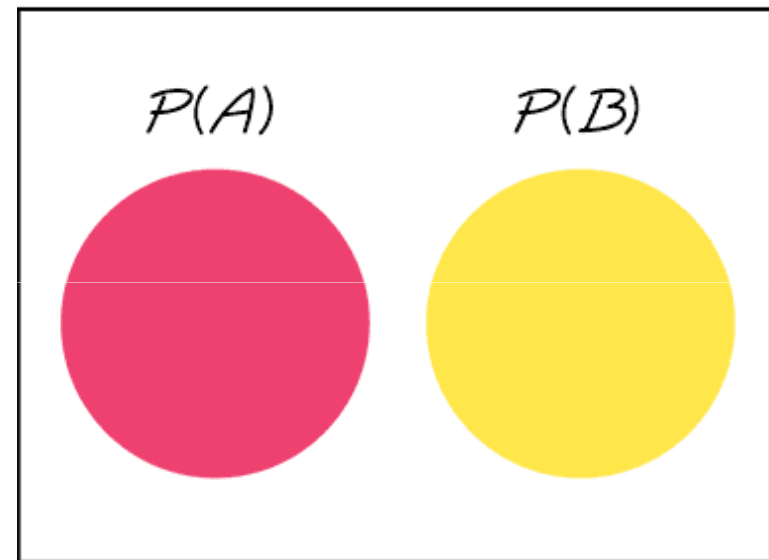


Diagrama de Venn para eventos disjuntos

Eventos Complementares

$P(A)$ e $P(\bar{A})$
são disjuntos

É impossível para qualquer evento que ele e seu complementar ocorram ao mesmo tempo.

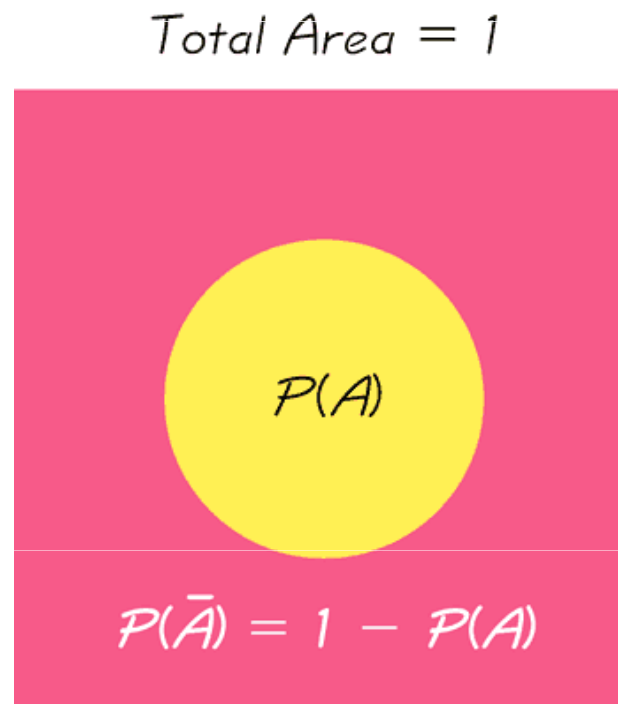
Regra dos Eventos Complementares

$$P(A) + P(\bar{A}) = 1$$

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

$$P(A) = 1 - P(\bar{A})$$

Diagrama de Venn para o Complementar do Evento A



Recapitulando

Nesta seção nós estudamos:

- ❖ **Eventos compostos.**
- ❖ **Regra da adição formal.**
- ❖ **Regra da adição intuitiva.**
- ❖ **Eventos disjuntos.**
- ❖ **Eventos complementares.**



Seção 4-4

Regra da Multiplicação:

Pontos Básicos

Created by Tom Wegleitner, Centreville, Virginia



Ponto Chave

Se temos dois eventos, e o resultado do primeiro evento A afeta de alguma maneira a probabilidade do segundo evento B , é importante ajustar a probabilidade de B para refletir a ocorrência do evento A .

A regra para calcular $P(A \text{ e } B)$ é chamada de Regra da Multiplicação.

Notação

$P(A \text{ e } B) =$

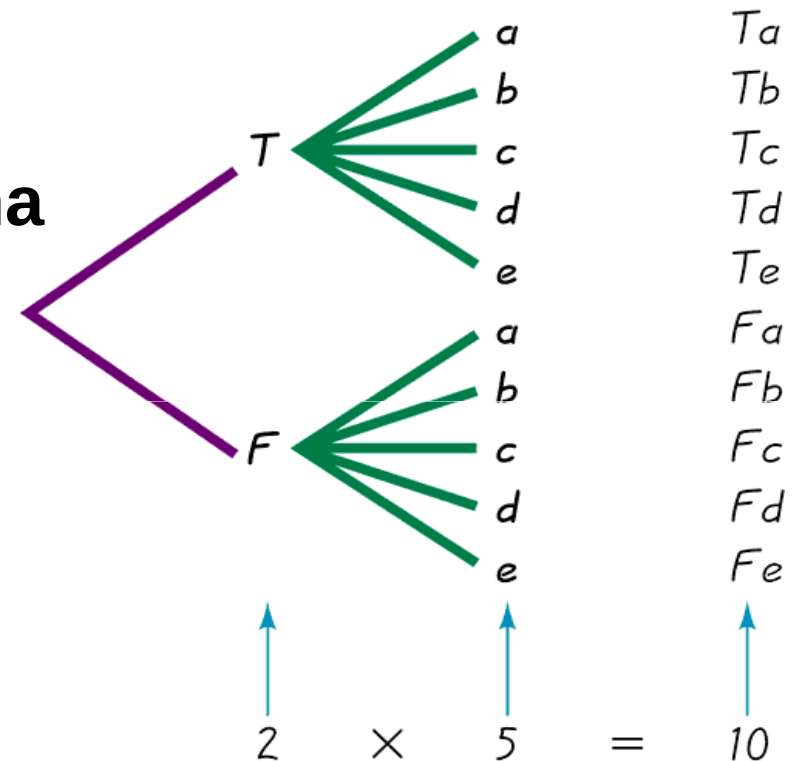
$P(\text{evento } A \text{ ocorre em uma primeira realização e o evento } B \text{ ocorre na segunda realização do experimento})$

Diagramas de Árvore

O **diagrama de árvore** é uma figura representando o espaço amostral de um experimento, apresentado como segmentos de linha partindo de um ponto comum. Estes diagramas são úteis quando o número de possibilidades é pequeno.

Esta figura resume os resultados possíveis para uma resposta Verdadeiro/Falso seguido de uma questão de múltipla escolha.

Note que há 10 combinações possíveis.



Ponto Chave

Probabilidade Condicional

É a probabilidade calculada para o segundo evento B levando em consideração o fato de que o primeiro evento A ocorreu.

Notação para Probabilidade Condicional

$P(B|A)$ representa a probabilidade de ocorrer o evento B assumindo que o evento A já tenha ocorrido. (lemos $B|A$ como “ B dado A .”)

Definições

Eventos Independentes

Dois eventos A e B são **independentes** se a ocorrência de um não afeta a probabilidade de ocorrer o outro. (Vários eventos são conjuntamente independentes se a ocorrência de qualquer um dos eventos não afeta a ocorrência dos outros.) Se A e B não são independentes, eles são ditos **dependentes**.

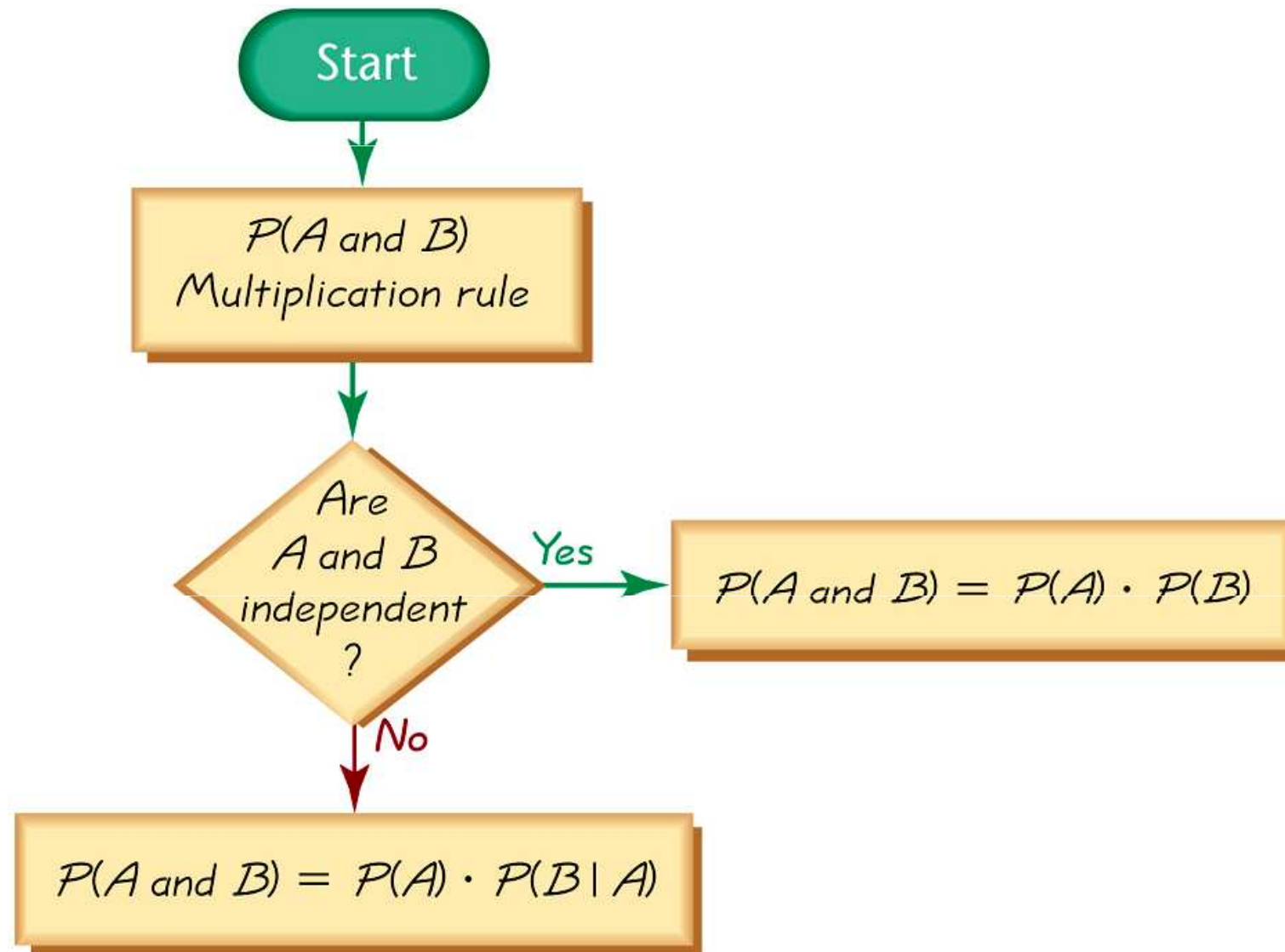
Regra da Multiplicação Formal

- ❖ $P(A \text{ e } B) = P(A) \cdot P(B|A)$
- ❖ Note que se A e B são eventos independentes, $P(B|A)$ é igual a $P(B)$.

Regra da Multiplicação Intuitiva

Quando calculamos a probabilidade do evento A ocorrer em uma realização e do evento B ocorrer na realização seguinte, multiplique a probabilidade do evento A pela probabilidade do evento B , mas tenha certeza de que a probabilidade do evento B leva em consideração a ocorrência prévia do evento A .

Aplicando a Regra da Multiplicação



Amostras Pequenas de Grandes Populações

Se o tamanho da amostra é menor que 5% do tamanho da população, considere a seleção como sendo **independente** (mesmo que seleção seja feita sem reposição, scnicamente dependentes).

Sumário dos Fundamentos

- ❖ Na Regra da Adição, a palavra “ou” em $P(A \text{ ou } B)$ sugere adição. Some $P(A)$ e $P(B)$, tendo o cuidado de garantir que cada resultado é somado apenas uma vez.
- ❖ Na Regra da Multiplicação, a palavra “e” em $P(A \text{ e } B)$ sugere produto. Multiplique $P(A)$ e $P(B)$, mas tenha certeza de que a probabilidade do evento B leva em consideração a ocorrência prévia do evento A .

Recapitulando

Nesta seção nós vimos:

- ❖ **Notação para $P(A \text{ e } B)$.**
- ❖ **Diagrama de árvore.**
- ❖ **Notação para probabilidade condicional.**
- ❖ **Eventos independentes.**
- ❖ **Regra da multiplicação formal e intuitiva.**



Seção 4-5

Regra da Multiplicação: Complementos e Probabilidade Condicional

Created by Tom Wegleitner, Centreville, Virginia



Ponto Chave

Nesta seção nós veremos a probabilidade de termos **pelo menos uma ocorrência** de um evento específico; e o conceito de Probabilidade Condicional que é a probabilidade de um evento dada a informação adicional de que algum outro evento já ocorreu.

Complementos: a Probabilidade de “Pelo Menos Um”

- ❖ “Pelo menos um” é equivalente a “um ou mais.”
- ❖ O complementar de termos pelo menos um item de um determinado tipo é termos **nenhum** item deste tipo.

Princípio Chave

Para calcular a probabilidade da ocorrência de **pelo menos um** de algum item, calculamos a probabilidade de **nenhum**, então subtraímos o resultado de 1. Ou seja,

$$P(\text{pelo menos um}) = 1 - P(\text{nenhum}).$$

Definição

A **Probabilidade Condicional** de um evento é a probabilidade obtida com a informação adicional de que algum outro evento ocorreu. $P(B|A)$ denota a probabilidade condicional do evento B ocorrer, dado que o evento A já ocorreu, e pode ser obtida dividindo a probabilidade dos eventos A e B ocorrerem conjuntamente pela probabilidade de ocorrência do evento A :

$$P(B | A) = \frac{P(A \text{ e } B)}{P(A)}$$

Abordagem Intuitiva para a Probabilidade Condicional

A probabilidade condicional de B dado A pode ser calculada assumindo que o evento A ocorreu, e trabalhando sobre esta hipótese, calcular a probabilidade de que o evento B ocorrerá.

Recapitulando

Nesta seção estudamos:

- ❖ **Conceito de “pelo menos um.”**
- ❖ **Probabilidade condicional.**
- ❖ **Abordagem intuitiva para probabilidade condicional.**



Seção 4-6

Probabilidades Através de

Simulações

Created by Tom Wegleitner, Centreville, Virginia



Ponto Chave

Nesta seção introduziremos uma abordagem diferente para calcular probabilidades que podem ser muito trabalhosas de serem obtidas através dos métodos formais discutidos nas seções anteriores.

Definição

Uma **simulação** de um experimento é um processo que comporta-se de maneira similar ao experimento, então resultados semelhantes podem ser produzidos.

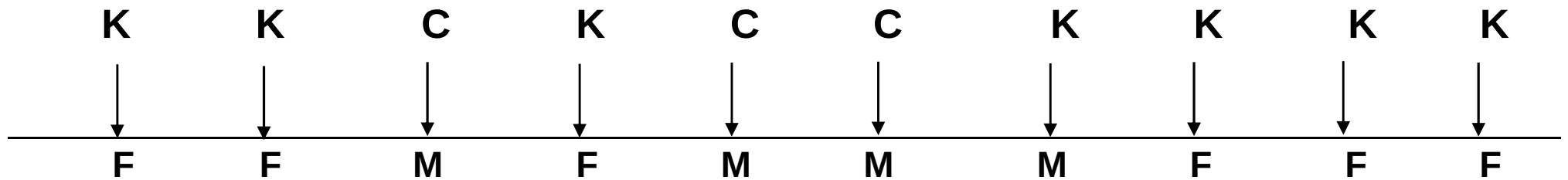
Exemplo de Simulação

Seleção de Gênero: Quando testamos técnicas de seleção de gênero, médicos pesquisadores precisam conhecer probabilidades de diferentes resultados, tal como a probabilidade de termos pelo menos 60 meninas em 100 crianças. Assumindo que o nascimento de meninos e meninas são equiprováveis, descreva uma simulação que resulta no gênero de 100 recém-nascidos.

Exemplo de Simulação

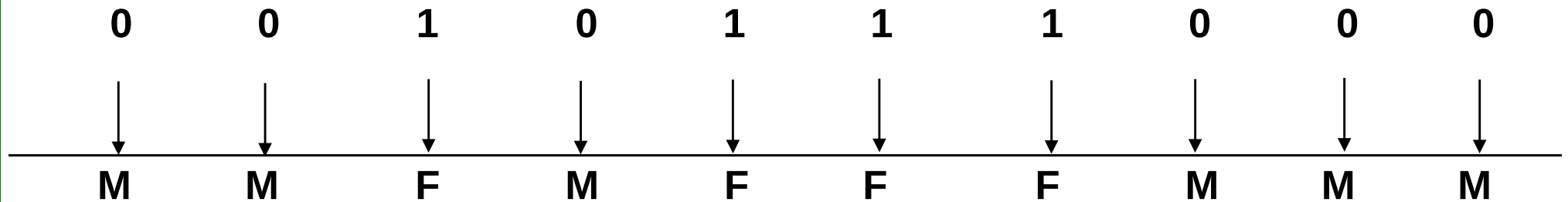
Solução 1:

- ❖ Lançar uma moeda honesta 100 vezes onde cara (K) = menina (F) e coroa (C) = menino (M)



Solução 2:

- ❖ Gerar 0's e 1's com um computador ou calculadora onde
0 = M
1 = F



Números Aleatórios

Em muitos experimentos, **números aleatórios** são usados em simulação de eventos que ocorrem naturalmente. Temos abaixo algumas maneiras de obtermos números aleatórios.

- ❖ Uma tabela de dígitos aleatórios
- ❖ STATDISK
- ❖ Minitab
- ❖ Excel
- ❖ Calculadora TI-83 Plus

Números aleatórios - cont

STATDISK

Row	1 Ran...
1	7
2	8
3	16
4	38
5	42
6	46
7	68
8	68
9	104
10	117
11	140
12	195
13	204
14	244
15	271
16	274

Minitab

↓	C1	C2
1	38	
2	48	
3	59	
4	71	
5	101	
6	107	
7	122	
8	129	
9	153	
10	153	
11	163	

Números aleatórios - cont

Excel

	A
1	15
2	3
3	15
4	362
5	164
6	184
7	158
8	59
9	143
10	85
11	134

Calculadora TI-83 Plus

```
randInt(1,365,25  
→L1  
(79 206 340 133...  
SortA(L1)  
Done  
L1  
(17 34 46 70 79...
```


Recapitulando

Nesta seção estudamos:

- ❖ **A definição de simulação.**
- ❖ **Como criar uma simulação.**
- ❖ **Formas de gerar números aleatórios.**



Seção 4-7

Contagens

Created by Tom Wegleitner, Centreville, Virginia



Ponto Chave

Em muitos problemas probabilísticos, o grande obstáculo é contar o total de resultados de um experimento, e esta seção apresenta vários métodos para calcular estas contagens.

Regra Fundamental da Contagem

Se temos uma seqüência de dois eventos no qual o primeiro evento ocorre de m maneiras e o segundo evento ocorre de n maneiras, os dois eventos conjuntamente ocorrem de $m \cdot n$ maneiras.

Notação

O **símbolo fatorial !** Denota o produto dos números positivos em ordem decrescente.

Por exemplo,

$$4! = 4 \bullet 3 \bullet 2 \bullet 1 = 24.$$

Por definição, $0! = 1$.

Regra do Fatorial

Uma coleção de n itens diferentes podem ser arrumados de $n!$ maneiras diferentes. (Esta **regra do fatorial** reflete o fato de que o primeiro item pode ser selecionado de n maneiras diferentes, o segundo de $n - 1$ maneiras, e assim por diante.)

Regra das Permutações

(quando os itens são todos diferentes)

Requisitos:

1. Há **n diferentes** itens disponíveis. (Esta regra não se aplica se algum dos itens é idêntico a outros.)
2. Seleccionamos **r** de **n** itens (sem reposição).
3. Consideramos rearranjos dos mesmos itens como sendo seqüência diferentes. (A permutação de **ABC** é diferente de **CBA** e é contada em separado.)

Se os requisitos anteriores são satisfeitos, o número de **permutações** (ou seqüência) de **r** itens seleccionados de **n** itens disponíveis (sem reposição) é

$${}_nP_r = \frac{n!}{(n - r)!}$$

Regra da Permutação

(quando alguns itens são **idênticos a outros**)

Requisitos:

1. Há **n** itens disponíveis, e alguns são idênticos a outros.
2. Nós selecionamos **n** itens (sem reposição).
3. Nós consideramos rearranjos de itens distintos como sendo seqüência diferentes.

Se os requisitos anteriores são satisfeitos, e se há **$n_1, n_2, \dots, n_k$** itens distintos, o número de **permutações** (ou seqüências) de todos os itens selecionados sem reposição é

$$\frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \dots \cdot n_k!}$$

Regra da Combinação

Requisitos:

1. Há n diferentes itens disponíveis.
2. Nós selecionamos r dos n itens (sem reposição).
3. Nós consideramos rearranjos dos mesmos itens como sendo iguais. (A combinação de ABC é igual a CBA .)

Se os requerimentos anteriores são satisfeitos, o número de **combinações** de r itens selecionados de n diferentes itens é

$${}_nC_r = \frac{n!}{(n - r)! r!}$$

Permutações versus Combinações

Quando ordenações diferentes dos mesmos itens são contabilizadas separadamente, nós temos um problema de permutação, mas quando ordenamentos diferentes não são contabilizadas separadamente, temos um problema de combinação.

Recapitulando

Nesta seção nós apresentamos:

- ❖ **A regra fundamental das contagens.**
- ❖ **A regra fatorial.**
- ❖ **A regra da permutação (quando os itens são diferentes).**
- ❖ **A regra da permutação (quando alguns itens são idênticos a outros).**
- ❖ **A regra da combinação.**