UFPR - Universidade Federal do Paraná
Departamento de Matemática
CM045 - Geometria Analítica
Prof. José Carlos Eidam

Lista 1

☆ Soma e produto escalar

1. Seja $OABC$ um tetraedro e M o ponto médio do lado BC. Exprima $\overrightarrow{AM}$ em termos de $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ e $\overrightarrow{OC}$.

2. Sejam A, B, C pontos quaisquer de $\mathbb{E}^3$, com $A \neq B$.

   (a) Mostre que P pertence à reta determinada por A e B se e só se existem números α, β tais que $\alpha + \beta = 1$ e $\overrightarrow{CP} = \alpha\overrightarrow{CA} + \beta\overrightarrow{CB}$.

   (b) Mostre que P pertence ao segmento $\overline{AB}$ se e só se os números α, β do ítem anterior pertencem a $[0, 1]$.

   (c) Verifique que P é interior ao segmento $\overline{AB}$ se e só se $\overrightarrow{PA}$ e $\overrightarrow{PB}$ têm sentido contrário.

3. Seja $ABCD$ um quadrilátero qualquer, M, N os pontos médios das diagonais AC e BD, respectivamente, e P o ponto médio do segmento $\overline{MN}$. Mostre que dado qualquer ponto $O \in \mathbb{E}^3$, tem-se
$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = 4\overrightarrow{OP}\,.$$

4. Mostre que o segmento que une os pontos médios de dois lados de um triângulo é paralelo ao terceiro lado e tem metade de sua medida.

5. Mostre que as diagonais de um paralelogramo têm o mesmo ponto médio.

6. Dado o triângulo ABC, considere X, Y pontos sobre as retas BC e AC, respectivamente.

   (a) Mostre que existem números α, β tais que $\overrightarrow{BX} = \alpha\overrightarrow{BC}$ e $\overrightarrow{AY} = \beta\overrightarrow{AC}$.

   (b) Mostre que AX e BY são paralelos se e só se $(\alpha - 1)(\beta - 1) = 1$.

   (c) Mostre que se X é interior ao lado BC e Y é interior ao lado AC então as retas AX e BY são concorrentes.

7. Considere um triângulo ABC e M, N, P os pontos médios dos lados AB, BC e AC, respectivamente.

   (a) Calcule $\overrightarrow{BP}, \overrightarrow{AN}$ e $\overrightarrow{CM}$ em função de $\overrightarrow{CA}$ e $\overrightarrow{CB}$.

   (b) Mostre que $\overrightarrow{AN}$ e $\overrightarrow{BP}$ não são paralelos. Em particular, as retas suporte de duas medianas quaisquer de um triângulo são concorrentes.

   (c) Dado um triângulo qualquer, mostre que existe um triângulo com lados paralelos e congruentes às medianas do primeiro.

☆ Dependência linear

8. Verdadeiro ou Falso? Justifique a sua resposta.
   (a) Se $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ é LD, então $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ é LD.
   (b) Se $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ é LI, então $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ é LI.
   (c) Se $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ é LI, então $\{2\vec{u} - \vec{v}, 2\vec{u} - 5\vec{v}\}$ é LI.
   (d) Se $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ é LD, então $\{\vec{u} + \vec{v}, \vec{u} - \vec{v}\}$ é LD.
   (e) Se $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ é LD, então $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ pode ser *LI* ou *LD*.
   (f) Um conjunto com mais que três vetores em $\mathbb{E}^3$ é sempre *LD*.
   (g) Se $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ é LI e $\vec{w} \notin \{\vec{u}, \vec{v}\}$ então $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ é LI.

9. Dados $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ LI, calcule o valor de a que torna o conjunto
$$\{2\vec{u} + 4\vec{v} + \vec{w}, \vec{v} - \vec{w}/2, -\vec{u} + \vec{v}/2 + a\vec{w}\}$$
linearmente dependente.

10. Dados $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$, defina $\vec{a} = \vec{u} + \vec{w}$, $\vec{b} = \vec{u} - 2\vec{v} + \vec{w}$ e $\vec{c} = \vec{u} + 2\vec{w}$. Mostre que $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ é LI se e só se $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ é LI.

11. Mostre que dados quaisquer números $\beta_1, \beta_2, \beta_3$, o conjunto $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ é LI se e só se
$$\{\vec{u}, \vec{v} + \beta_1\vec{u}, \vec{w} + \beta_2\vec{v} + \beta_3\vec{u}\}$$
é LI.

☆ Bases

12. Seja $OABC$ um tetraedro e M o ponto médio do segmento $\overline{BC}$. Mostre que $E = \{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}\}$ é uma base e calcule as coordenadas de $\overrightarrow{AM}$ nesta base.

13. Seja $E = \{e_1, e_2, e_3\}$ uma base e $\vec{f_1} = \vec{e_1} + \vec{e_2} + \vec{e_3}$, $\vec{f_2} = \alpha\vec{e_1} + 2\alpha\vec{e_2} - \vec{e_3}$, $\vec{f_3} = 4\vec{e_2} + 3\vec{e_3}$.
    (a) Para que valores de α temos que $F = (\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ é uma base?
    (b) Nas condições do ítem anterior, ache o valor de α para que $(1, 2, -1)_E = (0, 1, 0)_F$.

14. Calcule α de modo que $\vec{u} = (1, 2, 2)$ seja gerado por $\vec{v} = (\alpha - 1, 1, \alpha - 2)$ e $\vec{w} = (\alpha + 1, \alpha - 1, 2)$.

☆ Respostas

8. (a) F, (b) V, (c) V, (d) V, (e) V, (f) V, (g) F
9. $a = -7/4$
12. $\overrightarrow{AM} = (-1, 1/2, 1/2)_E$
13. (a) $\alpha \neq -4/7$; (b) $\alpha = 1$
14. $\alpha = 0$ ou $\alpha = 3$