UFPR - Universidade Federal do Paraná
Departamento de Matemática
CM045 - Geometria Analítica
Prof. José Carlos Eidam

Lista 2

☆ Bases

1. Seja $E = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ uma base e considere $\vec{v}_1 = \vec{u}_1 - \vec{u}_2$, $\vec{v}_2 = \alpha\vec{u}_1 + \vec{u}_3$ e $\vec{v}_3 = -\vec{u}_1 - \vec{u}_2 - \vec{u}_3$.
   (a) Para que valores de α o conjunto $F = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ é uma base?
   (b) Nas condições do ítem anterior, calcule α, β de forma que $\vec{u} = (1,1,1)_E$ e $\vec{v} = (2, \beta, 1)_F$ sejam LD.

2. Em um tetraedro $ABCD$, seja P um ponto tal que $\overrightarrow{AP} = \alpha\overrightarrow{PD}$. Determine os valores de α para os quais os vetores $\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BP} + \overrightarrow{BC}$ e $(1-\alpha)\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB}$ sejam LD.

3. Sejam $\vec{v}_1 = 2\vec{u}_1 - \vec{u}_2 + \vec{u}_3$, $\vec{v}_2 = -4\vec{u}_1 + \vec{u}_2$ e $\vec{v}_3 = -\vec{u}_2 - 7\vec{u}_3$. Admitindo que $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ é uma base, mostre que $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ é uma base.

4. Seja $E = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ uma base ortonormal e $\vec{u} = (\lambda, (1-\lambda), 1)$. Calcule os valores de λ para os quais $|u| = 2$.

☆ Mudança de base

5. Seja $E = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ uma base e $\vec{v}_1 = \vec{u}_1 + \vec{u}_2$, $\vec{v}_2 = -\vec{u}_1 + \vec{u}_3$, $\vec{v}_3 = -\vec{u}_1 + \vec{u}_2 - \vec{u}_3$.
   (a) Mostre que $F = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ é uma base.
   (b) Calcule as matrizes de mudança de base M_{EF} e M_{FE}.
   (c) Calcule as coordenadas do vetor $2\vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \frac{1}{3}\vec{v}_3$ na base E.
   (d) Calcule as coordenadas do vetor $-3\vec{u}_1 + \frac{1}{2}\vec{u}_2 + 2\vec{u}_3$ na base F.

6. Seja $E = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ uma base e $\vec{v}_1 = \vec{u}_1 + \vec{u}_2$, $\vec{v}_2 = \lambda\vec{u}_2 - \vec{u}_3$, $\vec{v}_3 = \vec{u}_1 + \lambda\vec{u}_3$.
   (a) Que condições deve satisfazer λ para que $F = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ seja uma base?
   (b) Calcule a matriz M_{FE}.

7. Sejam $E = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$, $F = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$, $G = \{\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3\}$ bases tais que $\vec{v}_1 = 2\vec{u}_1$, $\vec{v}_2 = -\vec{u}_1 + \vec{u}_3$, $\vec{v}_3 = \vec{u}_2 - \vec{u}_3$ e $\vec{w}_1 = -\vec{v}_1 + \vec{v}_2$, $\vec{w}_2 = \vec{v}_2 - \vec{v}_3$ e $\vec{w}_3 = 2\vec{v}_3$.
   (a) Calcule M_{EF} e M_{FG}.
   (b) Calcule M_{EG}.
   (c) Calcule M_{GF} e M_{GE}.

8. Sejam $E = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ uma base e $F = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$, onde $\vec{v}_1 = 2\vec{u}_1 + 2\vec{u}_2$, $\vec{v}_2 = 2\vec{u}_1 - \vec{u}_2$, $\vec{v}_3 = \vec{u}_1 + \vec{u}_2 - 5\vec{u}_3$.

    (a) Mostre que F é base.

    (b) Encontre as coordenadas do vetor $\vec{u}_1 - 2\vec{u}_2 + 3\vec{u}_3$ na base F.

    (c) Verifique se $\{\vec{w}, \vec{z}\}$ é LI ou LD, onde $\vec{w} = (2, 2, 0)_F$ e $\vec{z} = (-4, 0, -2)_E$.

    (d) Mesmo enunciado do ítem anterior, com $\vec{w} = (1, 0, 2)_F$ e $\vec{z} = (0, 1, 3)_E$.

☆ Respostas

1. (a) $\alpha \neq 2$; (b) $\alpha = 5/2$ e $\beta = -2$
4. $\lambda = (1 + \sqrt{7})/2$ ou $\lambda = (1 - \sqrt{7})/2$
5. (c) $(2/3, 5/3, 2/3)_E$; (d) $(-1/2, 2, 1/2)_F$
6. (a) $\lambda \neq \pm 1$