UFPR - Universidade Federal do Paraná
Departamento de Matemática
CM045 - Geometria Analítica
Prof. José Carlos Eidam

Lista 3

Em toda a lista, as coordenadas referem-se a uma base ortonormal $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ fixada.

✰ Produto Interno

1. Calcule x para que $\vec{u}, \vec{v}$ sejam ortogonais:
   (a) $\vec{u} = (x, 0, 3)$ e $\vec{v} = (1, x, 3)$;
   (b) $\vec{u} = (x, x, 4)$ e $\vec{v} = (4, x, 1)$;
   (c) $\vec{u} = (x + 1, 1, 2)$ e $\vec{v} = (x - 1, -1, -2)$;

2. Calcule, em radianos, a medida angular entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$:
   (a) $\vec{u} = (1, 0, 1)$, $\vec{v} = (-2, 10, 2)$;
   (b) $\vec{u} = (-1, 1, 1)$, $\vec{v} = (1, 1, 1)$;
   (c) $\vec{u} = (300, 300, 0)$, $\vec{v} = (-2000, -1000, 2000)$;

3. Ache um vetor $\vec{u}$ de norma $3\sqrt{3}$ que seja ortogonal a $\vec{v} = (2, 3, -1)$ e $\vec{w} = (2, -4, 6)$ e forme um ângulo agudo com o vetor $\vec{z} = (1, 0, 0)$.

4. Obtenha todos os vetores $\vec{u}$ que são ortogonais a $(1, 0, 0)$, têm norma $\sqrt{2}$ e tais que o ângulo entre $\vec{u}$ e $(1, -1, 0)$ é $\pi/4$.

5. Sejam $\vec{u} = (1, 1, 1)$, $\vec{v} = (0, 1, -1)$ e $\vec{w} = (2, 1, -1)$. Obtenha todos os vetores $\vec{z}$ de norma $\sqrt{5}$ ortogonais a $\vec{w}$ tais que $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ é LD.

6. Descreva os vetores $\vec{w}$ que são ortogonais a $\vec{v} = (2, 1, 2)$ tais que $\vec{u} = (1, 1, -1)$ é combinação linear de $\vec{v}$ e $\vec{w}$.

7. Determine $\vec{u}$ ortogonal a $(-3, 0, 1)$ tal que $\vec{u} \cdot (1, 4, 5) = 24$ e $\vec{u} \cdot (-1, 1, 0) = 1$.

8. Seja $E = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ uma base ortonormal, $\vec{u} = (x_1, x_2, x_3)_E$ um vetor não-nulo e $\vec{v} = \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}$ o versor de $\vec{u}$. Mostre que $\vec{v} = (\cos\alpha_1, \cos\alpha_2, \cos\alpha_3)_E$, onde α_j é o ângulo entre $\vec{u}$ e $\vec{u}_j$, para $j = 1, 2, 3$. Conclua que
$$\cos^2\alpha_1 + \cos^2\alpha_2 + \cos^2\alpha_3 = 1\,.$$

9. Verdadeiro ou Falso? Prove as afirmações verdadeiras e ache um contra-exemplo para as falsas:
   ① Se $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot \vec{w}$ então $\vec{v} = \vec{w}$.

② Se a medida angular entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$ é π radianos então $\vec{u} = -\vec{v}$.

③ Para quaisquer vetores $\vec{u}, \vec{v}$ tem-se $|\vec{u} \cdot \vec{v}| \leq |\vec{u}||\vec{v}|$.

④ Se $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ então $\vec{u} = 0$ ou $\vec{v} = 0$.

⑤ Se $\vec{u} \perp \vec{v}$ então $|\vec{u} + \vec{v}| = |\vec{u} - \vec{v}|$.

⑥ Se $\vec{u} \cdot \vec{u} = 0$ então $\vec{u} = 0$

10. Mostre que $(\vec{u}+\vec{v}) \cdot (\vec{u}-\vec{v}) = |\vec{u}|^2 - |\vec{v}|^2$. Conclua que as diagonais de um paralelogramo são ortogonais se e só se o paralelogramo é um losango.

11. Mostre que $|\vec{u} + \vec{v}|^2 + |\vec{u} - \vec{v}|^2 = 2(|\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2)$. Interprete esta igualdade geometricamente.

12. Em um quadrado $ABCD$ cujos lados medem 2, seja M o ponto médio do lado BC. Calcule a medida angular entre $\overrightarrow{DM}$ e $\overrightarrow{BD}$. (Dica: Escreva os dois últimos vetores como combinação linear de $\overrightarrow{DC}$ e $\overrightarrow{DA}$.)

13. Mostre que em um tetraedro regular duas arestas opostas são ortogonais.

14. A medida angular entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$ é $\pi/4$ radianos, $|\vec{u}| = \sqrt{5}$ e $|\vec{v}| = 1$. Calcule a medida angular entre $\vec{u} + \vec{v}$ e $\vec{u} - \vec{v}$.

15. Calcule a projeção ortogonal de $\vec{u}$ sobre $\vec{v}$:

    (a) $\vec{u} = (1, -1, 2)$, $\vec{v} = (3, -1, 1)$;

    (b) $\vec{u} = (1, 3, 5)$, $\vec{v} = (-3, 1, 0)$;

    (c) $\vec{u} = (1, 2, 4)$, $\vec{v} = (-2, -4, -8)$;

    (d) $\vec{u} = (-1, 1, 1)$, $\vec{v} = (-2, 1, 2)$.

16. Determine todos os vetores unitários $\vec{u} = (x, y, z)$ cuja projeção ortogonal sobre $\vec{k}$ é $\vec{k}/2$ e tais que a medida angular entre $\vec{v} = (x, y, 0)$ e $\vec{i}$ seja $\pi/6$ radianos.

17. Verdadeiro ou Falso? Prove as afirmações verdadeiras e ache um contra-exemplo para as falsas:

    ① $\mathrm{proj}_{\vec{u}}\vec{v} = \mathrm{proj}_{\vec{v}}\vec{u}$ quaisquer que sejam $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

    ② Se $\mathrm{proj}_{\vec{u}}\vec{v} = \mathrm{proj}_{\vec{v}}\vec{u}$ então $\vec{u} = \vec{v}$.

    ③ Se $\vec{u}, \vec{v}$ não são paralelos e $\mathrm{proj}_{\vec{u}}\vec{v} = \mathrm{proj}_{\vec{v}}\vec{u}$ então $u \perp \vec{v}$.

    ④ Se $\mathrm{proj}_{\vec{u}}\vec{v} = \vec{u}$ então $\vec{v} - \vec{u}$ é ortogonal a $\vec{u}$.

    ⑤ Se $\mathrm{proj}_{\vec{u}}\vec{v} = 0$ então $\vec{v} = 0$.

18. Mostre que se $\vec{u}, \vec{v}$ são não-nulos, então

$$\mathrm{proj}_{\vec{v}}(\mathrm{proj}_{\vec{u}}\vec{v}) = \frac{(\vec{u} \cdot \vec{v})^2}{|\vec{u}|^2|\vec{v}|^2}\vec{v}.$$

19. Mostre que $\vec{u} = \mathrm{proj}_{\vec{i}}\vec{u} + \mathrm{proj}_{\vec{j}}\vec{u} + \mathrm{proj}_{\vec{k}}\vec{u}$ para qualquer vetor $\vec{u}$. Mostre também que $\mathrm{proj}_{\vec{v}}\vec{u} = \mathrm{proj}_{\lambda\vec{v}}\vec{u}$ para qualquer $\lambda \neq 0$.

20. Sejam A, B, C pontos tais que $\overrightarrow{AB} = (2, \sqrt{3}, 1)$ e $\overrightarrow{AC} = (-1, \sqrt{3}, 1)$. Calcule o comprimento da altura relativa ao vértice A do triângulo ABC e a área do triângulo ABC.

21. Aplique o processo de Gram-Schmidt para obter uma base ortonormal a partir do conjunto $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$, onde $\vec{u}_1 = (1, 2, 2)$, $\vec{u}_2 = (1, 0, 1)$ e $\vec{u}_3 = (1, 1, 1)$.

✰ Orientação

22. Classifique as bases abaixo, duas a duas, em concordantes ou discordantes:

① $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$

② $\{2\vec{i} - \vec{j} - \vec{k}, \vec{i} + \vec{k}, \vec{i}\}$

③ $\{\vec{i} - \vec{k}, \vec{i} - \vec{j} + \vec{k}, \vec{j} + \vec{k}\}$

④ $\{\vec{j}, \vec{i} + \vec{j} - \vec{k}, -\vec{i} + \vec{j}\}$

✰ Produto Vetorial

23. Calcule o produto vetorial de $\vec{u}$ e $\vec{v}$ nos seguintes casos:

(a) $\vec{u} = (1, 0, 1)$, $\vec{v} = (0, 1, 2)$;

(b) $\vec{u} = (1, 2, 3)$, $\vec{v} = (-2, -4, -6)$;

(c) $\vec{u} = (1, -1, 2)$, $\vec{v} = (2, 0, -1)$;

(d) $\vec{u} = (0, -1, 3)$, $\vec{v} = (1, 1, 1)$.

24. Encontre todos os vetores $\vec{u}$ de norma 1 tais que $\vec{u} \wedge (\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}) = \vec{i} - \vec{k}$. Para qual deles a base $\{\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}, \vec{u}, \vec{i} - \vec{k}\}$ é positiva?

25. Descreva o conjunto solução das seguintes equações:

(a) $\vec{u} \wedge (\vec{i} - \vec{j} - 4\vec{k}) = 4\vec{i}$

(b) $\vec{u} \wedge (\vec{i} - 2\vec{k}) = 0$

(c) $\vec{u} \wedge \vec{i} = \vec{k}$

(d) $\vec{u} \wedge \vec{j} = \vec{k}$

(e) $\vec{u} \wedge \vec{k} = \vec{j}$

26. Determine $\vec{u}$ de norma $\sqrt{3}$ ortogonal a $\vec{i} + \vec{j}$ e a $-\vec{i} + \vec{k}$ que forma um ângulo agudo com o vetor $\vec{j}$.

27. Encontre $\vec{u}$ de norma $\sqrt{6}$ tal que $\vec{u} \wedge (\vec{i} + \vec{k}) = 2(\vec{i} + \vec{j} - \vec{k})$.

28. Sejam $\vec{u} = (1,1,1)$ e $\vec{v} = (0,1,2)$. Encontre uma base ortonormal positiva $\{\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3\}$ tal que:

   (a) $\vec{w}_1$ e $\vec{u}$ sejam paralelos com o mesmo sentido;

   (b) $\vec{w}_2$ seja combinação linear de $\vec{u}$ e $\vec{v}$;

   (c) $\vec{w}_3 \cdot \vec{k} > 0$.

29. Mostre que para qualquer vetor $\vec{v}$, tem-se

$$|\vec{v} \wedge \vec{i}|^2 + |\vec{v} \wedge \vec{j}|^2 + |\vec{v} \wedge \vec{k}|^2 = 2|\vec{v}|^2$$

30. O lado do quadrado $ABCD$ mede 2 e M é o ponto médio do lado BC. Calcule $|\overrightarrow{DM} \wedge \overrightarrow{DB}|$.

31. ABC é um triângulo e P, Q são pontos tais que $3\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AC}$ e $3\overrightarrow{BQ} = 2\overrightarrow{BC}$. Calcule a razão entre as áreas dos triângulos BPQ e ABC.

32. Resolva os seguintes sistemas:

   (a) $\begin{cases} \vec{u} \wedge (\vec{i} + \vec{j}) & = & -\vec{i} + \vec{j} \\ \vec{u} \cdot (\vec{i} + \vec{j}) & = & 2 \end{cases}$

   (b) $\begin{cases} \vec{u} \wedge (\vec{i} - \vec{k}) & = & \vec{j} \\ \vec{u} + \vec{v} & = & \vec{i} + \vec{j} \\ |\vec{u}| = 1 \end{cases}$

   (c) $\begin{cases} (\vec{u} + \vec{i} - 2\vec{k}) \wedge (\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}) & = & -\vec{i} + \vec{j} + \vec{k} \\ \vec{u} \cdot (\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}) & = & 10 \end{cases}$

33. Verdadeiro ou Falso? Prove as afirmações verdadeiras e ache um contra-exemplo para as falsas:

   ① Se $\vec{u}, \vec{v}$ são paralelos então $\vec{u} \wedge \vec{v} = 0$.

   ② Se $\vec{u} \wedge \vec{v} = 0$ então $\vec{u}, \vec{v}$ são paralelos.

   ③ Se $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{u} \wedge \vec{w}$ então $\vec{v} = \vec{w}$.

   ④ $|\vec{u} \wedge \vec{v}| = |\vec{u}||\vec{v}|$.

   ⑤ Se $\vec{u} \wedge \vec{v} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$ então $\alpha = \beta = 0$.

   ⑥ Se $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ é LI e $\vec{u} \wedge \vec{v} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$ então $\alpha = \beta = 0$.

   ⑦ A base $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{v} \wedge \vec{u}\}$ é positiva.

   ⑧ Se $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ é LI e $\vec{w}$ é ortogonal a $\vec{u}$ e a $\vec{v}$ então $\vec{w}$ é paralelo a $\vec{u} \wedge \vec{v}$.

   ⑨ Para quaisquer $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ tem-se que $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{w} = \vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w})$.

   ⑩ Para quaisquer $\vec{u}, \vec{v}$ tem-se $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{v} \wedge \vec{u}$.

34. Neste exercício, vamos estudar o produto vetorial $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{w}$.

   (a) Mostre que existem $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tais que $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{w} = \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$.

(b) Assumindo que $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ seja LI, vamos construir uma nova base ortonormal $E = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ da seguinte forma: tomamos $\vec{u}_1$ paralelo a $\vec{u}$ e $\vec{u}_2$ como combinação linear de $\vec{u}$ e $\vec{v}$. Mostre que $\vec{u} = (a_1, 0, 0)_E$ e $\vec{u}_2 = (a_2, b_2, 0)_E$.

(c) Pondo $\vec{u}_3 = (a_3, b_3, c_3)_E$, mostre que $\vec{u}\wedge\vec{v} = (0, 0, a_1b_2)_E$ e $(\vec{u}\wedge\vec{v})\wedge\vec{w} = (-a_1b_2b_3, a_1a_3b_2, 0)_E$.

(d) Use o ítem (1) para mostrar que $\mu = a_1a_3 =$ e $\lambda = -(a_2a_3 - b_2b_3)$.

(e) Conclua que $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{w} = -(\vec{v} \cdot \vec{w})\vec{u} + (\vec{u} \cdot \vec{w})\vec{v}$, para quaisquer vetores $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$.

(f) Mostre que $\vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w}) = (\vec{u} \cdot \vec{w})\vec{v} - (\vec{u} \cdot \vec{v})\vec{w}$, para quaisquer vetores $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$.

(g) Conclua a *Identidade de Jacobi*: $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{w} + (\vec{v} \wedge \vec{w}) \wedge \vec{u} + (\vec{w} \wedge \vec{u}) \wedge \vec{v} = 0$.

(h) Mostre que $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{w} = \vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w})$ se e só se $\vec{u}$ e $\vec{w}$ são paralelos ou se $\vec{u}, \vec{w}$ são ortogonais a $\vec{v}$.

☆ Respostas

(1) (a) $x = -9$, (b) $x = -2$, (c) $x = \pm\sqrt{6}$
(2)(a) $\theta = \pi/2$, (b) $\theta = \arccos(1/3)$, (c) $\theta = 3\pi/4$
(3) $(3, -3, -3)$, **(4)** $(1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}, 1)$ e $(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, -1)$
(5) $\vec{z} = (\pm1, 0, \pm2)$; **(6)** $\vec{w} = \lambda(7, 8, -11)$, com $\lambda \neq 0$
(7) $\vec{u} = (1, 2, 3)$; **(12)** $\theta = \arccos(-3/\sqrt{10})$
(14) $\theta = \arccos(4/\sqrt{26})$
(15) (a)$\frac{1}{11}(18, -6, 6)$, (b) $(0, 0, 0)$, (c) $(1, 2, 4)$ (d) $\frac{1}{9}(-10, 5, 10)$
(16) $(3/4, -\sqrt{3}/4, 1/2)$ e $(3/4, \sqrt{3}/4, 1/2)$; **(20)** 2 e 3
(21) $\vec{v}_1 = \frac{1}{3}(1, 2, 2)$, $\vec{v}_2 = \frac{1}{3}(2, -2, 1)$, $\vec{v}_3 = \frac{1}{3}(2, 1, -2)$
(22) ① e ④ são positivas e as demais são negativas
(23) (a) $(-1, -2, 1)$, (b) $(0, 0, 0)$ (c) $(1, 5, 2)$ (d) $(-4, 3, 1)$
(24) $\vec{u} = (0, 1, 0)$ ou $\vec{u} = \frac{1}{3}(-2, 1, -2)$; para o segundo vetor
(25) (a) $\emptyset$; (b) $\vec{u} = a(1, 0, -2)$, $a \in \mathbb{R}$; (c) $\vec{u} = (a, -1, 0)$, $a \in \mathbb{R}$;
(c) $\vec{u} = (1, b, 0)$, $b \in \mathbb{R}$; (c) $\vec{u} = (-1, 0, c)$, $c \in \mathbb{R}$.
(26) $\vec{u} = (-1, 1, -1)$; **(27)** $\vec{u} = (-1, 2, 1)$;
(28) $\vec{w}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)$, $\vec{w}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, -1)$, $\vec{w}_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(-1, 2, -1)$
(30) 2; **(31)** 4/9; **(32)** (1) $\vec{u} = (1, 1, 1)$;
(2) $\vec{u} = (0, 0, 1)$, $\vec{v} = (1, 1, -1)$ ou $\vec{u} = (1, 0, 0)$, $\vec{v} = (0, 1, -1)$
(3) $\vec{u} = (3/2, 4, 1/2)$