

Lista 4

Em toda a lista, as coordenadas referem-se a um sistema de coordenadas fixo $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

☆ Sistemas de coordenadas

1. Sejam $A = (3, 0, -1)$, $B = (0, 3, 0)$, $C = (5, 1, -2)$ e $D = (-4, 1, 2)$. Mostre que estes pontos são vértices de um trapézio e diga quais são as bases e os lados não-paralelos
2. Sejam $A = (1, 6, 4)$, $B = (2, -1, 9)$, $C = (1, 1, -1)$ e $D = (1, 1, a)$. Determine para que valores de a os pontos A, B, C, D são vértices de um quadrilátero.
3. Calcule as coordenadas do ponto médio M do segmento \overline{AB} , onde $A = (1, 2, 3)$ e $B = (-2, -6, 1)$.
4. Dados $A = (-2, a, 0)$ e $B = (2, 1, a)$, calcule o valor de a para o qual a distância entre A e B é $\sqrt{15}$.
5. Sejam $A = (-1, 0, 2)$, $B = (1, 1, 1)$ e $C = (1, 0, 1)$. Mostre que o triângulo ABC é retângulo.
6. Sejam $A = (1, 2, -1)$, $B = (0, 1, 1)$ e $C = (2, 0, 0)$. Mostre que o triângulo ABC é equilátero.
7. Dados $A = (-1, 2, 3)$ e $B = (3, -2, 0)$ encontre as coordenadas dos pontos C, D que são colineares com A e B e dividem o segmento \overline{AB} em três partes iguais.

☆ Equação da reta

8. Sejam $A = (-5, 2, 3)$ e $B = (4, -7, -6)$ e $C = (3, 1, 4)$.
 - (a) Escreva as equações vetorial, paramétrica e simétrica da reta que passa por A e B .
 - (b) Faça o mesmo para a reta que passa por B e C .
 - (c) Conclua que A, B, C são colineares.
9. Calcule a equação vetorial da reta que passa por $A = (1, 0, 1)$ e $B = (2, 1, -1)$.
10. Calcule um vetor diretor para a reta $\frac{2x-1}{2} = 1 - y = 3z + 3$. Escreva esta última equação na forma vetorial.
11. Considere a reta r de equações

$$\begin{cases} x = 1 - \lambda \\ y = -2 + 3\lambda \\ z = 2 - \lambda \end{cases} .$$

- (a) Obtenha a equação vetorial da reta paralela a r que passa pelo ponto $(-1, 2, 7)$.
 (b) Verifique se $Q = (2, 2, 4)$ pertence a r .
 (c) Mostre que a reta definida pelas equações

$$\begin{cases} x = -4 + 2\lambda \\ y = 13 - 6\lambda \\ z = -3 + 2\lambda \end{cases}$$

coincide com r .

- (d) Calcule a equação simétrica de r .

- (e) Ache os pontos P de r tais que a distância entre P e $(1, 0, 2)$ é $\sqrt{3}$.

12. Sejam $A = (1, 1, 1)$, $B = (0, 0, 1)$ e r a reta $(x, y, z) = (1, 0, 0) + \lambda(1, 1, 1)$. Determine os pontos P de r equidistantes de A e B .

13. Considere as equações abaixo:

(a) $\frac{3x+3}{6} = \frac{y-2}{6} = -2z + 4$

(b) $(x, y, z) = (1, 0, 1) + \lambda(7, 2, -2)$

(c) $\begin{cases} x = -1 + 2\lambda \\ y = 2 + 6\lambda \\ z = 2 - \lambda/2 \end{cases}$

(d) $(x, y, z) = (8, 2, -1) + \lambda(1, 0, 2)$

(e) $\begin{cases} x = 10 - 3\lambda \\ y = 2 \\ z = 3 - 6\lambda \end{cases}$

(f) $\frac{x-1}{7} = \frac{y}{2} = \frac{z-1}{-2}$

(g) $(x, y, z) = (1, 8, 3/2) + \lambda(4, 12, -1)$

(h) $\frac{x+6}{7} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-3}{-2}$

Analise quais delas definem a mesma reta.

14. Sejam $P = (2, 1, -1)$, $Q = (0, -1, 0)$, $A = (0, 3, 0)$ e $B = (6, 3, 3)$. Determine um ponto C pertencente à reta que passa por P e Q tal que a área do triângulo ABC seja 9.
15. Escreva a equação simétrica da reta que passa pelo ponto $A = (-1, -4, -2)$ e pelo ponto médio do segmento de extremidades $(1, 3, 5)$ e $(3, -3, 1)$.
16. Sejam $A = (1, 2, -1)$ e $B = (0, 1, 2)$ e considere a reta r que passa pelo ponto $(0, 2, 0)$ e tem a direção do vetor $(2, -2, 1)$. Encontre os pontos C de r tais que o triângulo ABC tem um ângulo reto no vértice C .
17. Sejam $A = (3, 6, -7)$, $B = (-5, 2, 3)$ e $C = (4, -7, -6)$. Verifique que ABC é um triângulo e escreva as equações paramétricas da reta que contém a mediana relativa ao vértice C .

☆ Respostas

- (1) $\overrightarrow{DB}, \overrightarrow{AC}$ são os lados paralelos e $\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{CB}$ são os lados não-paralelos. (2) $a \neq -1$;
(3) $M = (-1/2, -2, 2)$; (4) $a = 1$ (7) $C = (0, 2, 2), D = (1, 0, 1)$
(8) $(x, y, z) = (4, -7, -6) + \lambda(1, -1, -1); x = 4 + \lambda, y = -7 - \lambda, z = -6 - \lambda; \frac{x-4}{-1} = \frac{y+7}{1} = \frac{z+6}{1}$
(9) $(x, y, z) = (1, 0, 1) + \lambda(1, 1, 0)$
(10) $\vec{v} = (3, -3, 1); (x, y, z) = (1/2, 1, -1) + \lambda(3, -3, 1)$
(11) (a) $(x, y, z) = (-1, 2, 7) + \lambda(-1, 3, -1)$; (b) $Q \notin r$; (d) $\frac{x-1}{-1} = \frac{y+2}{3} = \frac{z-2}{-1}$; (e) $P = (0, 1, 1)$ e $P = (\frac{10}{11}, -\frac{19}{11}, \frac{20}{11})$. (12) $P = (1, 0, 0)$;
(13) (a),(c),(g) ; (b),(f),(h) e (d),(e) definem as mesmas retas, sendo que as três são distintas entre si. (14) $C = (2, 1, -1)$ ou $C = (22/9, 13/9, -11/9)$. (15) $\frac{x+1}{3} = \frac{y+4}{4} = \frac{z+2}{5}$
(16) $C = (\frac{5 \pm \sqrt{97}}{9}, \frac{13 \mp \sqrt{97}}{9}, \frac{5 \pm \sqrt{97}}{18})$; (17) $\begin{cases} x = 4 + 5\lambda \\ y = -7 - 11\lambda \\ z = -6 - 4\lambda \end{cases}$