

Lista 5

Em toda a lista, as coordenadas referem-se a um sistema de coordenadas fixo $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

1. Verifique se as equações abaixo determinam o mesmo plano:

- ① $(x, y, z) = (1, 2, 1) + \lambda(1, -1, 2) + \mu(-1/2, 2/3, -1)$ e $(x, y, z) = (1, 2, 1) + \lambda(-1, 1, 2) + \mu(-3, 4, -6)$
- ② $(x, y, z) = (1, 1, 1) + \lambda(2, 3, -1) + \mu(-1, 1, 1)$ e $(x, y, z) = (1, 6, 2) + \lambda(-1, 1, 1) + \mu(2, 3, -1)$
- ③ $(x, y, z) = (0, 0, 0) + \lambda(1, 1, 0) + \mu(0, 1, 0)$ e $(x, y, z) = (1, 1, 0) + \lambda(1, 2, 1) + \mu(0, -1, 1)$
- ④ $(x, y, z) = (2, 1, 3) + \lambda(1, 1, -1) + \mu(1, 0, 1)$ e $(x, y, z) = (0, 1, 1) + \lambda(1, 3, -5) + \mu(1, -1, -3)$

2. Escreva uma equação vetorial, equações paramétricas e uma equação normal para os planos π abaixo:

- ① π contém $P = (1, 2, 0)$ e é paralelo aos vetores $\vec{u} = (1, 1, 0)$ e $\vec{v} = (2, 3, -1)$;
- ② π contém $P = (1, 1, 0)$, $Q = (1, -1, -1)$ e é paralelo ao vetor $\vec{v} = (2, 1, 0)$;
- ③ π contém $P = (1, 0, 1)$, $Q = (0, 1, -1)$ e é paralelo ao segmento de extremidades $A = (1, 2, 1)$ e $B = (0, 1, 0)$
- ④ π contém os pontos $P = (1, 0, 1)$, $Q = (2, 1, -1)$ e $R = (1, -1, 0)$
- ⑤ π contém os pontos $P = (1, 0, 2)$, $Q = (-1, 1, 3)$ e $R = (3, -1, 1)$
- ⑥ π contém $P = (1, 0, -1)$ e a reta $r : \frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = 2 - z$
- ⑦ π contém $P = (1, -, 1, 1)$ e a reta $r : (x, y, z) = (0, 2, 2) + \lambda(1, 1, -1)$

3. Obtenha equações paramétricas do plano que contém $P = (1, 1, 2)$ e é paralelo ao plano

$$\pi : \begin{cases} x = 1 + \lambda + 2\mu \\ y = 2\lambda + \mu \\ z = -\lambda \end{cases} .$$

4. Decomponha o vetor $\vec{u} = (1, 2, 4)$ como soma de um vetor paralelo à reta $r : (x, y, z) = (1, 9, 18) + \lambda(2, 1, 0)$ e de um vetor paralelo ao plano $\pi : (x, y, z) = (1, 1, 0) + \lambda(1, 0, 1) + \mu(0, 1, -1)$.

5. Verifique se o vetor \vec{u} é paralelo ao plano π se:

- ① $\vec{u} = (1, 2, 1)$ e $\pi : 3x + y - 5z = -1$;
- ② $\vec{u} = (-1, 4, 0)$ e $\pi : (x, y, z) = (4, 8, -17) + \lambda(1, 0, 1) + \mu(2, -1, 1)$;
- ③ $\vec{u} = (2011, 0, -2011)$ e $\pi : \begin{cases} x = 1 - \lambda - \mu \\ y = 20 + \lambda + 3\mu \\ z = 51 - \lambda - \mu \end{cases} ;$

④ $\vec{u} = (1, 1, 2)$ e $\pi : x - 4y + 3z = 13$.

6. Verifique se o vetor \vec{u} é normal ao plano π se:

① $\vec{u} = (-1, 3, 2)$ e $\pi : 3x - 9y - 6z = 5$;

② $\vec{u} = (6, 6, -6)$ e $\pi : (x, y, z) = (-4, 1, -1) + \lambda(1, 0, 1) + \mu(2, -1, 1)$;

③ $\vec{u} = (2, 1, -2)$ e $\pi : \begin{cases} x = 11 - \lambda - \mu \\ y = \lambda + 3\mu \\ z = 5 - \lambda - \mu \end{cases} ;$

④ $\vec{u} = (1, 1, 2)$ e $\pi : 3x - 4y + 5z = 7$.

7. Esboce os planos abaixo:

① $x = 2$

② $y = -1$

③ $z = 0$

④ $x + y = 1$

⑤ $y - z = 0$

⑥ $x + y + z = 1$

8. Obtenha uma equação geral (normal) para os planos π abaixo:

① $\pi : \begin{cases} x = 1 + \lambda - \mu \\ y = 2\lambda + \mu \\ z = 3 - \mu \end{cases}$

② $\pi : \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 2 \\ z = 3 - \lambda + \mu \end{cases}$

③ $(x, y, z) = (-2, 2, 0) + \lambda(1, 2, 1) + \mu(-1, 2, 1)$

④ $(x, y, z) = (0, 0, 0) + \lambda(1, 1, 3) + \mu(-3, 2, -1)$

9. Obtenha uma equação vetorial para os planos π abaixo:

① $4x + 2y - z + 5 = 0$

② $5x - y - 1 = 0$

③ $z - 3 = 0$

④ $y - z - 2 = 0$

10. Determine a posição relativa das retas abaixo e, se for caso, determine seu ponto de intersecção:

① $r : (x, y, z) = (1, 1, 0) + \lambda(1, 2, 3)$ e $s : (x, y, z) = (2, 3, 3) + \lambda(3, 2, 1)$

② $r : \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = \lambda \\ z = 1 + 3\lambda \end{cases}$ e $s : \frac{x+1}{4} = \frac{y+1}{2} = \frac{z+2}{6}$

$$\textcircled{3} r: \begin{cases} x = 2\lambda \\ y = 1 - 2\lambda \\ z = \lambda \end{cases} \text{ e } s: (x, y, z) = (2, 4, 11) + \lambda(-4, 5, 0)$$

$$\textcircled{4} r: \frac{x-2}{3} = \frac{y+2}{4} = z \text{ e } s: \begin{cases} x = 4\lambda \\ y = 2\lambda \\ z = 3 + 2\lambda \end{cases}$$

11. Mostre que r e s são concorrentes, ache seu ponto de intersecção e determine uma equação geral para o plano que contém r e s :

$$\textcircled{1} r: \begin{cases} x = \lambda \\ y = -\lambda \\ z = 1 + 4\lambda \end{cases} \text{ e } s: \frac{x-1}{3} = \frac{y-5}{3} = \frac{2+z}{5}$$

$$\textcircled{2} r: \begin{cases} x = 2 - 2\lambda \\ y = 4 + \lambda \\ z = -3\lambda \end{cases} \text{ e } s: \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = -2\lambda \\ z = 2\lambda \end{cases}$$

$$\textcircled{3} r: \frac{x-3}{2} = \frac{y-6}{2} = z - 1 \text{ e } s: \frac{x}{2} = \frac{y}{8} = \frac{z+4}{8}$$

12. Obtenha a intersecção da reta r com o plano π :

$$\textcircled{1} r: (x, y, z) = (-1, -1, 0) + \lambda(1, -1, -1), \pi: x + y + z + 1 = 0$$

$$\textcircled{2} r: (x, y, z) = (-1, -1, 1) + \lambda(1, -1, 0), \pi: x + y + z + 1 = 0$$

$$\textcircled{3} r: x - 3 = y - 2 = \frac{z+1}{2}, \pi: x + 2y - z = 10$$

$$\textcircled{4} r: (x, y, z) = (-1, -1, 0) + \lambda(1, -1, 0), \pi: 2x + 2y + z + 1 = 0$$

$$\textcircled{5} r: \begin{cases} x = 2\lambda \\ y = \lambda \\ z = 1 - 3\lambda \end{cases} \text{ e } s: \begin{cases} x = 1 + \alpha \\ y = -3 + \beta \\ z = 1 + \alpha + \beta \end{cases}$$

$$\textcircled{6} r: x - 3 = y = \frac{z+1}{2} \text{ e } \pi: (x, y, z) = (0, 0, 0) + \lambda(1, 2, 0) + \mu(0, -1, 3)$$

13. Considere os pontos $A = (1, 1, 2)$, $B = (0, 1, 2)$, $C = (1, 1, 0)$ e $D = (0, 1, 0)$. Mostre que A, B, C, D são vértices de um retângulo e obtenha as equações normal, paramétrica e vetorial do plano que contém A, B, C e D .

14. Determine a intersecção dos planos π_1 e π_2 . Quando se tratar de uma reta, descreva-a por equações vetoriais.

$$\textcircled{1} \pi_1: x + 2y - z - 1 = 0 \text{ e } \pi_2: 2x + y - z = 1$$

$$\textcircled{2} \pi_1: z = 1 \text{ e } \pi_2: y - 2x + 2 = 0$$

$$\textcircled{3} \pi_1: x - y + 3z = 1 \text{ e } \pi_2: 2x - 2y + 6z = 2$$

$$\textcircled{4} \pi_1: 3x - 4y + 2z = 4 \text{ e } \pi_2: -5x + 20y - 10z = 9$$

$$\textcircled{5} \pi_1: x + y - z = 0 \text{ e } \pi_2: (x, y, z) = (1, 0, 0) + \lambda(1, 2, 0) + \mu(0, -1, 2) \quad \pi_1 \cap \pi_2: (x, y, z) = (1, -1/3, 2/3) + \lambda(1, 1, 2)$$

$$\textcircled{6} \pi_1: (x, y, z) = (1, 1, 1) + \lambda(0, 2, 0) + \mu(1, 0, -1) \text{ e } \pi_2: (x, y, z) = (0, 0, -1) + \lambda(1, -1, 0) + \mu(1, 0, 1)$$

$$\textcircled{7} \pi_1 : (x, y, z) = (3, 0, 2) + \lambda(0, -1, 2) + \mu(0, 0, -1) \text{ e } \pi_2 : (x, y, z) = (3, 1, 2) + \lambda(1, 0, 0) + \mu(1, 1, 1)$$

15. Estude a posição relativa de r e s :

$$\textcircled{1} (x, y, z) = (1, -1, 1) + \lambda(-2, 1, -1) \text{ e } s : \begin{cases} y + z = 3 \\ x + y - z = 6 \end{cases}$$

$$\textcircled{2} r : \begin{cases} x - y - z = 2 \\ x + y - z = 0 \end{cases} \text{ e } s : \begin{cases} 2x - 3y + z = 5 \\ x + y - 2z = 0 \end{cases}$$

$$\textcircled{3} r : \frac{x+1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z+1}{2} \text{ e } s : (x, y, z) = (0, 0, 0) + \lambda(1, 2, 0)$$

$$\textcircled{4} r : \frac{x+3}{2} = \frac{y-1}{4} = z \text{ e } s : \begin{cases} 2x - y + 7 = 0 \\ x + y - 6z = -2 \end{cases}$$

$$\textcircled{5} (x, y, z) = (8, 1, 9) + \lambda(2, -1, 3) \text{ e } s : (x, y, z) = (3, -4, 4) + \lambda(1, -2, 2)$$

$$\textcircled{6} r : \frac{x-1}{3} = \frac{y-5}{3} = \frac{z+2}{5} \text{ e } r : x = -y = \frac{z-1}{4}$$

$$\textcircled{7} r : \frac{x+1}{2} = y = -z \text{ e } s : \begin{cases} x + y - 3z = 1 \\ 2x - y - 2z = 0 \end{cases}$$

$$\textcircled{8} r : x + 3 = \frac{2y-4}{4} = \frac{z-1}{3} \text{ e } s : (x, y, z) = (0, 2, 2) + \lambda(1, 1, -1)$$

16. Considere as retas $r : \begin{cases} x - \alpha y + 1 = 0 \\ y - z - 1 = 0 \end{cases}$, $s : x = y/\alpha = z$ e $t : \begin{cases} x + y - z = 0 \\ y + z + 1 = 0 \end{cases}$. Calcule o valor de α que torna:

- ① r e s paralelas;
- ② r, s, t paralelas a um mesmo plano;
- ③ r e t concorrentes;
- ④ s e t coplanares;
- ⑤ r e s reversas.

17. Mostre que r e s determinam um plano π e obtenha uma equação geral de π :

$$\textcircled{1} r : x - 1 = y = 2z \text{ e } s : x - 1 = y = z$$

$$\textcircled{2} r : (x - 1)/2 = y - 3/3 = z/4 \text{ e } s : x/2 = y/3 = (z - 4)/4$$

18. Estude a posição relativa de r e π e, quando for o caso, encontre o ponto de intersecção:

$$\textcircled{1} r : (x, y, z) = (1, 1, 0) + \lambda(0, 1, 1) \text{ e } \pi : x - y - z = 2$$

$$\textcircled{2} r : (x - 1)/2 = y = z \text{ e } \pi : (x, y, z) = (3, 0, 1) + \lambda(1, 0, 1) + \mu(2, 2, 0)$$

$$\textcircled{3} r : \begin{cases} x - y + z = 0 \\ 2x + y - z - 1 = 0 \end{cases} \text{ e } \pi : (x, y, z) = (0, 1/2, 0) + \lambda(1, -1/2, 0) + \mu(0, 1, 1)$$

$$\textcircled{4} r : \begin{cases} x - y = 1 \\ x - 2y = 0 \end{cases} \text{ e } \pi : x + y = 2$$

$$\textcircled{5} r : (x, y, z) = (0, 0, 0) + \lambda(1, 4, 1) \text{ e } \pi : (x, y, z) = (1, -1, 1) + \lambda(0, 1, 2) + \mu(1, -1, 0)$$

$$\textcircled{6} r : \frac{x+2}{3} = y - 1 = \frac{z+3}{3} \text{ e } \pi : 3x - 6y - z = 0$$

19. Para que valores de α a reta $r : \frac{x-1}{\alpha} = \frac{y}{1} = \frac{z}{2}$ é transversal ao plano $\pi : x + \alpha y + z = 0$?
20. Estude a posição relativa dos planos π_1 e π_2 :
- ① $\pi_1 : (x, y, z) = (1, 1, 1) + \lambda(0, 1, 1) + \mu(-1, 2, 1)$ e $\pi_2 : (x, y, z) = (1, 0, 0) + \lambda(1, -1, 0) + \mu(-1, -1, -2)$
 - ② $\pi_1 : (x, y, z) = (4, 2, 4) + \lambda(1, 1, 2) + \mu(3, 3, 1)$ e $\pi_2 : (x, y, z) = (3, 0, 0) + \lambda(1, 1, 0) + \mu(0, 1, 4)$
 - ③ $\pi_1 : 2x - y + 2z - 1 = 0$ e $\pi_2 : 4x - 2y + 4z = 0$
 - ④ $\pi_1 : x - y + 2z - 2 = 0$ e $\pi_2 : (x, y, z) = (0, 0, 1) + \lambda(1, 0, 3) + \mu(-1, 1, 1)$
21. Determine, em função de α , a posição relativa dos planos $\pi_1 : 2x + y + 3z + 1 = 0$ e $\pi_2 : (x, y, z) = (1, 1, 1) + \lambda(1, 1, 0) + \mu(2, -1, \alpha)$.
22. Verifique se as retas abaixo são perpendiculares ou ortogonais:
- ① $r : (x, y, z) = (1, 2, 3) + \lambda(1, 2, 1)$ e $s : (x, y, z) = (2, 4, 4) + \lambda(-1, 1, -1)$
 - ② $r : x + 3 = y = z/3$ e $s : (x - 4)/2 = y - 4 = -z$
 - ③ $r : (x, y, z) = (1, 2, 3) + \lambda(-1, 2, 1)$ e $s : (x, y, z) = (0, 0, 0) + \lambda(1, 1, -1)$
 - ④ $r : (x, y, z) = (2, -5, 1) + \lambda(3, -2, -1)$ e $s : (x - 4)/2 = (y - 2)/3 = (z + 4)/(-5)$
23. Obtenha uma equação geral do plano π que contém o ponto P e é perpendicular à reta r :
- ① $P = (0, 1, -1)$ e r contém $A = (1, -1, 1)$ e $B = (-1, 1, -1)$
 - ② $P = (1, 1, -1)$ e $r : \begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ 2x - 3y + z - 1 = 0 \end{cases}$
24. Determine a projeção ortogonal da reta $r : x+1 = y+2 = 3z-3$ sobre o plano $\pi : x-y+2z = 0$.
25. Verifique se π_1 e π_2 são perpendiculares:
- ① $\pi_1 : (x, y, z) = (1, -3, 4) + \lambda(1, 0, 3) + \mu(0, 1, 3)$ e $\pi_2 : (x, y, z) = (0, 0, 0) + \lambda(1, 1, 6) + \mu(1, -1, 0)$
 - ② $\pi_1 : (x, y, z) = (4, 3, 1) + \lambda(1, 0, 1) + \mu(3, 1, 0)$ e $\pi_2 : y - 3z = 0$
26. Obtenha uma equação geral do plano π que contém a reta $r : (x, y, z) = (1, 0, 2) + \lambda(4, 1, 0)$ e é perpendicular a $\pi_1 : 3x + y + z = 0$.
27. Obtenha uma equação geral do plano que contém o ponto $(2, 1, 0)$ e é perpendicular aos planos $\pi_1 : x + 2y - 3z + 4 = 0$ e $\pi_2 : 8x - 4y + 16z - 1 = 0$.

☆ Respostas

- (1) Somente as equações em ①, ② e ④ determinam o mesmo plano
- (2) ① $\pi : (x, y, z) = (1, 2, 0) + \lambda(1, 1, 0) + \mu(2, 3, -1); \pi : -x + y + z = 1;$
 ② $\pi : (x, y, z) = (1, 1, 0) + \lambda(0, 2, 1) + \mu(2, 1, 0); \pi : -x + 2y - 4z = 1;$
 ③ $\pi : (x, y, z) = (1, 0, 1) + \lambda(1, -1, 2) + \mu(1, 1, 1); \pi : -3x + y + 2z = -1;$
 ④ $\pi : (x, y, z) = (1, -1, 0) + \lambda(-1, -2, 1) + \mu(0, 1, 1); \pi : -3x + y - z = -4;$
 ⑤ Como P, Q, R são colineares, π não é único. O plano π pode ser qualquer plano determinado por $(x, y, z) = (1, 0, 2) + \lambda(-2, 1, 1) + \mu(a, b, c)$, onde $\vec{v} = (a, b, c)$ não é paralelo a $\overrightarrow{PQ} = (-2, 1, 1);$
- ⑥ $\pi : (x, y, z) = (1, 0, -1) + \lambda(2, 3, -1) + \mu(0, 0, 3); \pi : 3x - 2y - 3 = 0;$
 ⑦ $\pi : (x, y, z) = (1, -1, 1) + \lambda(1, 1, -1) + \mu(-1, 3, 1); \pi : x + z - 2 = 0;$
- (3) $\pi : \begin{cases} x = 1 + \lambda + 2\mu \\ y = 1 + 2\lambda + \mu \\ z = 2 - \lambda \end{cases}$
- (4) $\vec{u} = (11, 7, 4) + (-10, -5, 0)$, (5) \vec{u} é paralelo a π somente nos itens ① e ③;
 (6) \vec{u} é normal a π somente nos itens ① e ②;
- (8) ① $\pi : 2x - y - 3z + 7 = 0;$ ② $y - 2 = 0;$ ③ $y - 2z = 0;$ ④ $7x + 8y - 5z = 0$
- (9) ① $(x, y, z) = (0, 0, 5) + \lambda(1, 0, 4) + \mu(0, 1, 2);$ ② $(x, y, z) = (0, -1, 0) + \lambda(1, 5, 0) + \mu(0, 0, 1);$
 ③ $(x, y, z) = (0, 0, 3) + \lambda(1, 0, 0) + \mu(0, 1, 0);$ ④ $(x, y, z) = (0, 2, 0) + \lambda(1, 1, 0) + \mu(0, 0, 1)$
- (10) As retas em ① e ③ são concorrentes com ponto de intersecção $(2, 3, 3)$ e $(22, -21, 11)$, respectivamente. As retas em ② são iguais e as do item ④ são reversas.
- (11) ① $(-2, 2, -7), \pi : -17x + 7y + 6z - 6 = 0;$ ② $(-2, 6, -6), \pi : 4x - y - 3z - 4 = 0;$
 ③ $(1, 4, 0), \pi : 4x - 7y + 6z + 24 = 0$ (12) ① $(-2, 0, 1);$ ② A intersecção é a reta $r;$ ③ $(5, 4, 3);$ ④ Vazio; ⑤ $(-2/3, -1/3, 2);$ ⑥ $(-16/7, -5/7, -81/7)$ (13) $y - 1 = 0;$
- (14) ① $\pi_1 \cap \pi_2 : (x, y, z) = (0, 0, -1) + \lambda(1, 1, 3);$ ② $\pi_1 \cap \pi_2 : (x, y, z) = (0, -2, 1) + \lambda(1, 2, 0);$
 ③ $\pi_1 \cap \pi_2 = \pi_1;$ ④ $\pi_1 \cap \pi_2 = \emptyset;$ ⑤ $\pi_1 \cap \pi_2 : (x, y, z) = (2, -1, 0) + \lambda(1, 0, 1)$
 ⑥ $\pi_1 \cap \pi_2 : (x, y, z) = (3, -1, 0) + \lambda(0, 1, 1)$
- (15) ① Paralelas distintas; ② Concorrentes em $P = (1, -1, 0);$ ③ Reversas; ④ Coincidentes;
 ⑤ Concorrentes em $P = (-2, 6, -6);$ ⑥ Concorrentes em $P = (-2, 2, -7);$ ⑦ Reversas; ⑧ Reversas;
- (16) ① $\alpha = 1;$ ② $\alpha = 1;$ ③ α qualquer; ④ Não existe $\alpha;$ ⑤ α diferente de 0 e 1;
- (17) ① r e s são concorrentes em $P = (1, 0, 0)$ e $\pi : x - y - 1 = 0;$ ② r e s são paralelas distintas e $\pi : 8x - 4y - z + 4 = 0$
- (18) ① r e π são transversais, $P = (1, 0, -1);$ ② r é paralela a $\pi;$ ③ r está contida em $\pi;$ ④ r e π são paralelos; ⑤ r é transversal a $\pi, P = (-1/9, -4/9, -1/9);$ ⑥ r é paralela a $\pi;$ (19) $\alpha \neq -2;$
- (20) ① Iguais; ② Transversais; ③ Paralelos distintos; ④ Transversais;
- (21) π_1 e π_2 são transversais para qualquer valor de $\alpha;$
- (22) ① Perpendiculares; ② Perpendiculares; ③ Ortogonais e não-perpendiculares; ④ Não são ortogonais; (23) ① $x - y + z = 0;$ ② $x + y + z - 1 = 0;$ (24) $(x, y, z) = (-3/2, -3/2, 0) + \lambda(8, 10, 1)$
- (25) ① Não; ② Sim; (26) $x - 4y + z - 3 = 0;$ (27) $x - 2y - z = 0$