

## Lista 7

### ☆ Cônicas

Para estes problemas, as coordenadas serão tomadas em relação a um sistema de coordenadas ortonormal  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  no plano  $\mathbb{E}^2$ .

1. São dados, em cada caso, o parâmetro geométrico  $a$  e os focos de uma elipse. Obtenha uma equação algébrica em  $x, y$  satisfeita por todos os pontos da elipse:

①  $a = 4, F_1 = (-3, 2)$  e  $F_2 = (-3, 6)$

②  $a = 3, F_1 = (-1, -1)$  e  $F_2 = (1, 1)$

2. Esboce as elipses abaixo e calcule a distância focal, a medida dos eixos e a excentricidade:

①  $5x^2 + 9y^2 = 45$

②  $16x^2 + 4y^2 = 4$

③  $3x^2 + 5y^2 = 15$

④  $4x^2 + 169y^2 = 676$

3. Obtenha a equação reduzida e a excentricidade da elipse cujo centro é a origem  $(0, 0)$  e cujos focos estão nos eixos coordenados nos seguintes casos:

① O eixo menor mede 6 e a distância focal é 8.

② O eixo maior mede 10 e a distância focal é 6.

③ Os focos são  $(0, 6)$  e  $(0, -6)$  e o eixo maior mede 34.

④ Os focos são  $(-1, 0)$  e  $(1, 0)$  e um dos vértices é  $(0, \sqrt{2})$ .

4. Obtenha uma equação reduzida de uma elipse de centro na origem que tem focos em um dos eixos coordenados, excentricidade  $\varepsilon = \sqrt{3}/2$  e contém o ponto  $(\sqrt{3}, 1/2)$ .

5. Esboce as hipérbolas abaixo e calcule a distância focal, a medida dos eixos transversal e conjugado, a excentricidade e as assíntotas:

①  $9x^2 - 4y^2 = 36$

②  $x^2 - y^2 + 1 = 0$

③  $5x^2 - 9y^2 - 45 = 0$

④  $x^2 - 4y^2 = 2$

6. Obtenha a equação reduzida e a excentricidade da hipérbole cujo centro é a origem  $(0, 0)$  e cujos focos estão nos eixos coordenados nos seguintes casos:

- ① Os vértices são  $(\pm 2, 0)$  e os focos são  $(\pm 3, 0)$ .
- ② Os vértices são  $(\pm 15, 0)$  e as assíntotas são  $y = \pm 4x/5$ .
- ③ O ponto  $(5, 9)$  pertence à hipérbole e as assíntotas têm equações  $y = \pm x$ .
- ④ Os focos estão no eixo  $y$ , as assíntotas têm equações  $y = \pm 3x/2$  e o eixo conjugado mede 8.
7. Obtenha uma equação reduzida da hipérbole de centro na origem que tem focos em um dos eixos coordenados, excentricidade 2 e contém o ponto  $(2, \sqrt{7})$ .
8. Calcule o foco, o vértice e a diretriz das parábolas abaixo:
- ①  $y^2 = 4x$
- ②  $x^2 + 8y = 0$
- ③  $x^2 + 6y = 6$
- ④  $y = 2x^2 - 4x + 2$
9. Obtenha, em cada caso abaixo, uma equação reduzida da parábola de vértice  $(0, 0)$ :
- ① O foco é  $(8, 0)$ .
- ② A diretriz tem equação  $y = 2$ .
- ③ O ponto  $(4, 7)$  pertence à diretriz e o eixo é  $Ox$ .
- ④ O ponto  $(5, 10)$  pertence à parábola e o eixo é  $Ox$ .
10. Descreva a cônica que cada uma das equações abaixo determina:
- ①  $4x^2 - y^2 + 8x - 2y - 1 = 0$
- ②  $x^2 - 2x - 4y - 8 = 0$
- ③  $3x^2 + 2y^2 + 6x - 8y + 5 = 0$
- ④  $2x^2 + y^2 + 2y - 1 = 0$
- ⑤  $6x^2 - y^2 - 4y + 2 = 0$
- ⑥  $x^2 - y^2 - 2x + 2y - 3 = 0$
11. Obtenha a equação da parábola que tem como foco o ponto  $P = (-4, -2)$  e como diretriz a reta  $r : 2x + y = 3$ .

### ☆ Quádricas

12. Identifique e esboce cada uma das seguintes quádricas de  $\mathbb{E}^3$ :
- ①  $2x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 2z + 1 = 0$
- ②  $x^2 - y^2 - z^2 + 2z - 5 = 0$
- ③  $z - 3x^2 - 5y^2 = 0$
- ④  $x^2 - y^2 + z = 0$

$$\textcircled{5} \quad 2x^2 + 3y^2 - z^2 = 0$$

$$\textcircled{6} \quad x^2 - 3y^2 + 8z^2 = 1$$

### ☆ Respostas

(1) ①  $4x^2 + 3y^2 + 24x - 24y + 36 = 0$ ; ②  $8x^2 - 2xy + 8y^2 - 63 = 0$ ;

(2) ①  $6, 2\sqrt{5}, 4, \varepsilon = 1/3$ ; ②  $2, 1, \sqrt{3}, \varepsilon = \sqrt{3}/2$ ;

③  $2\sqrt{5}, 2\sqrt{3}, 2\sqrt{2}, \varepsilon = \sqrt{2/5}$ ; ④  $26, 4, 2\sqrt{165}, \varepsilon = \sqrt{165}/13$ ;

(3) ①  $x^2/25 + y^2/9 = 1, \varepsilon = 4/5$ ; ②  $x^2/25 + y^2/16 = 1, \varepsilon = 3/5$ ;

③  $x^2/289 + y^2/253 = 1, \varepsilon = 6/17$ ; ④  $x^2/3 + y^2/2 = 1, \varepsilon = 1/\sqrt{3}$

(4)  $x^2/4 + y^2 = 1$  ou  $x^2/(49/16) + y^2/(49/4) = 1$  (5) ①  $2\sqrt{13}, 4, 6, \varepsilon = \sqrt{13}/2, y = \pm(2/3)x$ ;

②  $2\sqrt{2}, 2, 2\sqrt{2}, y = \pm x/\sqrt{2}$ ; ③  $2\sqrt{14}, 6, 2\sqrt{5}, \sqrt{14}/3, y = \pm 3x/\sqrt{5}$ ;

④  $\sqrt{5}/2, 2\sqrt{2}, \sqrt{2}, \sqrt{5}/2, y = \pm 2x$ ;

(6) ①  $x^2/4 - y^2/5 = 1, \varepsilon = 3/2$ ; ②  $x^2/225 - y^2/144 = 1, \varepsilon = \sqrt{369}/15$ ;

③  $y^2/56 - x^2/56 = 1, \varepsilon = \sqrt{2}$  ④  $y^2/36 - x^2/16 = 1, \varepsilon = \sqrt{52}/6$

(7)  $x^2/(5/3) - y^2/5 = 1$  ou  $y^2/(17/3) - x^2/17 = 1$  (8) ①  $(1, 0), (0, 0), x = -1$ ; ②  $(-2, 0), (0, 0), y = 2$ ;

③  $(0, 1/2), (0, 1), y = 5/2$ ; ④  $(1, 1/8), (1, 0), y = -1/8$ ;

(9) ①  $y^2 = 32x$ ; ②  $y = -8x^2$ ; ③  $x = -16y^2$ ; ④  $y^2 = 20x$ ;

(10) ① Hipérbole de centro  $(-1, -1)$ , eixos transversal e conjugado paralelos aos eixos coordenados, medindo 2 e 4, respectivamente, e vértices  $(0, 0), (-2, 0)$ ; ② Parábola de vértice  $(2, -3)$ , diretriz  $y = -4$ , foco  $(2, -2)$ ;

③ Elipse de centro  $(-1, 2)$  e eixos paralelos aos eixos coordenados medindo  $2\sqrt{2}$  e  $\sqrt{3}$ ;

④ Conjunto vazio; ⑤ Hipérbole de centro  $(0, -2)$ , eixos transversal e conjugado paralelos aos eixos coordenados, medindo  $2\sqrt{6}$  e 2, respectivamente, e vértices  $(0, 2 \pm \sqrt{6})$ ;

⑥ Reunião das retas  $x - y + 1 = 0$  e  $x + y - 3 = 0$ ; (11)  $x^2 - 4xy + 4y^2 + 52x + 26y + 91 = 0$

(12) ① Elipsóide de centro  $(-1, 0, 1)$  e eixos paralelos aos eixos coordenados medindo 1,  $\sqrt{2}$ ,  $\sqrt{2}$ ;

② Hiperbolóide de 2 folhas com eixos paralelos aos eixos coordenados medindo 1, 1, 1;

③ Parabolóide elíptico de vértice na origem;

④ Parabolóide hiperbólico;

⑤ Superfície cônica com vértice na origem e eixo Oz;

⑥ Hiperbolóide de uma folha