Exercícios de Geometria Analítica - CM045

Prof. José Carlos Corrêa Eidam
DMAT/UFPR

Disponível no sítio `people.ufpr.br/ ~eidam/index.htm`

1o. semestre de 2011

Parte 1

✰ Soma e produto escalar

1. Seja $OABC$ um tetraedro e M o ponto médio do lado BC. Exprima $\vec{v}AM$ em termos de $\vec{v}OA$, $\vec{v}OB$ e $\vec{v}OC$.

2. Sejam A, B, C pontos quaisquer de $\mathbb{E}^3$, com $A \neq B$.

   (a) Mostre que P pertence à reta determinada por A e B se e só se existem números α, β tais que $\alpha + \beta = 1$ e $\vec{v}CP = \alpha\vec{v}CA + \beta\vec{v}CB$.

   (b) Mostre que P pertence ao segmento $\overline{AB}$ se e só se os números α, β do ítem anterior pertencem a $[0,1]$.

   (c) Verifique que P é interior ao segmento $\overline{AB}$ se e só se $\vec{v}PA$ e $\vec{v}PB$ têm sentido contrário.

3. Seja $ABCD$ um quadrilátero qualquer, M, N os pontos médios das diagonais AC e BD, respectivamente, e P o ponto médio do segmento $\overline{MN}$. Mostre que dado qualquer ponto $O \in \mathbb{E}^3$, tem-se

$$\vec{v}OA + \vec{v}OB + \vec{v}OC + \vec{v}OD = 4\vec{v}OP.$$

4. Mostre que o segmento que une os pontos médios de dois lados de um triângulo é paralelo ao terceiro lado e tem metade de sua medida.

5. Mostre que as diagonais de um paralelogramo têm o mesmo ponto médio.

6. Dado o triângulo ABC, considere X, Y pontos sobre as retas BC e AC, respectivamente.

   (a) Mostre que existem números α, β tais que $\vec{v}BX = \alpha\vec{v}BC$ e $\vec{v}AY = \beta\vec{v}AC$.

   (b) Mostre que AX e BY são paralelos se e só se $(\alpha - 1)(\beta - 1) = 1$.

   (c) Mostre que se X é interior ao lado BC e Y é interior ao lado AC então as retas AX e BY são concorrentes.

7. Considere um triângulo ABC e M, N, P os pontos médios dos lados AB, BC e AC, respectivamente.

   (a) Calcule $\vec{v}BP$, $\vec{v}AN$ e $\vec{v}CM$ em função de $\vec{v}CA$ e $\vec{v}CB$.

   (b) Mostre que $\vec{v}AN$ e $\vec{v}BP$ não são paralelos. Em particular, as retas suporte de duas medianas quaisquer de um triângulo são concorrentes.

   (c) Dado um triângulo qualquer, mostre que existe um triângulo com lados paralelos e congruentes às medianas do primeiro.

✰ Dependência linear

8. Verdadeiro ou Falso? Justifique a sua resposta.

   (a) Se $\{\vec{v}u, \vec{v}v, \vec{v}w\}$ é LD, então $\{\vec{v}u, \vec{v}v\}$ é LD.

   (b) Se $\{\vec{v}u, \vec{v}v, \vec{v}w\}$ é LI, então $\{\vec{v}u, \vec{v}v\}$ é LI.

(c) Se $\{\vec{v}u, \vec{v}v\}$ é LI, então $\{2\vec{v}u - \vec{v}v, 2\vec{v}u - 5\vec{v}v\}$ é LI.

(d) Se $\{\vec{v}u, \vec{v}v\}$ é LD, então $\{\vec{v}u + \vec{v}v, \vec{v}u - \vec{v}v\}$ é LD.

(e) Se $\{\vec{v}u, \vec{v}v, \vec{v}w\}$ é LD, então $\{\vec{v}u, \vec{v}v\}$ pode ser LI ou LD.

(f) Um conjunto com mais que três vetores em $\mathbb{E}^3$ é sempre LD.

(g) Se $\{\vec{v}u, \vec{v}v\}$ é LI e $\vec{v}w \notin \{\vec{v}u, \vec{v}v\}$ então $\{\vec{v}u, \vec{v}v, \vec{v}w\}$ é LI.

9. Dados $\vec{v}u, \vec{v}v, \vec{v}w$ LI, calcule o valor de a que torna o conjunto

$$\{2\vec{v}u + 4\vec{v}v + \vec{v}w, \vec{v}v - \vec{v}w/2, -\vec{v}u + \vec{v}v/2 + a\vec{v}w\}$$

linearmente dependente.

10. Dados $\vec{v}u, \vec{v}v, \vec{v}w$, defina $\vec{v}a = \vec{v}u + \vec{v}w$, $\vec{v}b = \vec{v}u - 2\vec{v}v + \vec{v}w$ e $\vec{v}c = \vec{v}u + 2\vec{v}w$. Mostre que $\{\vec{v}u, \vec{v}v, \vec{v}w\}$ é LI se e só se $\{\vec{v}a, \vec{v}b, \vec{v}c\}$ é LI.

11. Mostre que dados quaisquer números $\beta_1, \beta_2, \beta_3$, o conjunto $\{\vec{v}u, \vec{v}v, \vec{v}w\}$ é LI se e só se

$$\{\vec{v}u, \vec{v}v + \beta_1\vec{v}u, \vec{v}w + \beta_2\vec{v}v + \beta_3\vec{v}u\}$$

é LI.

☆ Bases

1. Seja $OABC$ um tetraedro e M o ponto médio do segmento $\overline{BC}$. Mostre que $E = \{\vec{v}OA, \vec{v}OB, \vec{v}OC\}$ é uma base e calcule as coordenadas de $\vec{v}AM$ nesta base.

2. Seja $E = \{e_1, e_2, e_3\}$ uma base e $\vec{v}f_1 = \vec{v}e_1 + \vec{v}e_2 + \vec{v}e_3$, $\vec{v}f_2 = \alpha\vec{v}e_1 + 2\alpha\vec{v}e_2 - \vec{v}e_3$, $\vec{v}f_3 = 4\vec{v}e_2 + 3\vec{v}e_3$.

   (a) Para que valores de α temos que $F = (\vec{v}f_1, \vec{v}f_2, \vec{v}f_3)$ é uma base?

   (b) Nas condições do ítem anterior, ache o valor de α para que $(1,2,-1)_E = (0,1,0)_F$.

3. Calcule α de modo que $\vec{v}u = (1,2,2)$ seja gerado por $\vec{v}v = (\alpha - 1, 1, \alpha - 2)$ e $\vec{v}w = (\alpha + 1, \alpha - 1, 2)$.

☆ Respostas

8. (a) F, (b) V, (c) V, (d) V, (e) V, (f) V, (g) F
9. $a = -7/4$
12. $\vec{v}AM = (-1, 1/2, 1/2)_E$
13. (a) $\alpha \neq -4/7$; (b) $\alpha = 1$
14. $\alpha = 0$ ou $\alpha = 3$

Parte 2

✰ Bases

1. Seja $E = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ uma base e considere $\vec{v}_1 = \vec{u}_1 - \vec{u}_2$, $\vec{v}_2 = \alpha\vec{u}_1 + \vec{u}_3$ e $\vec{v}_3 = -\vec{u}_1 - \vec{u}_2 - \vec{u}_3$.
   (a) Para que valores de α o conjunto $F = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ é uma base?
   (b) Nas condições do ítem anterior, calcule α, β de forma que $\vec{u} = (1,1,1)_E$ e $\vec{v} = (2,\beta,1)_F$ sejam LD.
2. Em um tetraedro $ABCD$, seja P um ponto tal que $\overrightarrow{AP} = \alpha\overrightarrow{PD}$. Determine os valores de α para os quais os vetores $\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BP} + \overrightarrow{BC}$ e $(1-\alpha)\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB}$ sejam LD.
3. Sejam $\vec{v}_1 = 2\vec{u}_1 - \vec{u}_2 + \vec{u}_3$, $\vec{v}_2 = -4\vec{u}_1 + \vec{u}_2$ e $\vec{v}_3 = -\vec{u}_2 - 7\vec{u}_3$. Admitindo que $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ é uma base, mostre que $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ é uma base.
4. Seja $E = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ uma base ortonormal e $\vec{u} = (\lambda, (1-\lambda), 1)$. Calcule os valores de λ para os quais $|u| = 2$.

✰ Respostas

1. (a) $\alpha \neq 2$; (b) $\alpha = 5/2$ e $\beta = -2$
4. $\lambda = (1+\sqrt{7})/2$ ou $\lambda = (1-\sqrt{7})/2$
5. (c) $(2/3, 5/3, 2/3)_E$; (d) $(-1/2, 2, 1/2)_F$
6. (a) $\lambda \neq \pm 1$

Parte 3

As coordenadas referem-se a uma base ortonormal $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ fixada.

✰ Produto Interno

1. Calcule x para que $\vec{u}, \vec{v}$ sejam ortogonais:
   (a) $\vec{u} = (x, 0, 3)$ e $\vec{v} = (1, x, 3)$;
   (b) $\vec{u} = (x, x, 4)$ e $\vec{v} = (4, x, 1)$;
   (c) $\vec{u} = (x+1, 1, 2)$ e $\vec{v} = (x-1, -1, -2)$;

2. Calcule, em radianos, a medida angular entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$:
   (a) $\vec{u} = (1, 0, 1)$, $\vec{v} = (-2, 10, 2)$;
   (b) $\vec{u} = (-1, 1, 1)$, $\vec{v} = (1, 1, 1)$;
   (c) $\vec{u} = (300, 300, 0)$, $\vec{v} = (-2000, -1000, 2000)$;

3. Ache um vetor $\vec{u}$ de norma $3\sqrt{3}$ que seja ortogonal a $\vec{v} = (2, 3, -1)$ e $\vec{w} = (2, -4, 6)$ e forme um ângulo agudo com o vetor $\vec{z} = (1, 0, 0)$.

4. Obtenha todos os vetores $\vec{u}$ que são ortogonais a $(1, 0, 0)$, têm norma $\sqrt{2}$ e tais que o ângulo entre $\vec{u}$ e $(1, -1, 0)$ é $\pi/4$.

5. Sejam $\vec{u} = (1, 1, 1)$, $\vec{v} = (0, 1, -1)$ e $\vec{w} = (2, 1, -1)$. Obtenha todos os vetores $\vec{z}$ de norma $\sqrt{5}$ ortogonais a $\vec{w}$ tais que $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ é LD.

6. Descreva os vetores $\vec{w}$ que são ortogonais a $\vec{v} = (2, 1, 2)$ tais que $\vec{u} = (1, 1, -1)$ é combinação linear de $\vec{v}$ e $\vec{w}$.

7. Determine $\vec{u}$ ortogonal a $(-3, 0, 1)$ tal que $\vec{u} \cdot (1, 4, 5) = 24$ e $\vec{u} \cdot (-1, 1, 0) = 1$.

8. Seja $E = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ uma base ortonormal, $\vec{u} = (x_1, x_2, x_3)_E$ um vetor não-nulo e $\vec{v} = \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}$ o versor de $\vec{u}$. Mostre que $\vec{v} = (\cos\alpha_1, \cos\alpha_2, \cos\alpha_3)_E$, onde α_j é o ângulo entre $\vec{u}$ e $\vec{u}_j$, para $j = 1, 2, 3$. Conclua que
$$\cos^2\alpha_1 + \cos^2\alpha_2 + \cos^2\alpha_3 = 1\,.$$

9. Verdadeiro ou Falso? Prove as afirmações verdadeiras e ache um contra-exemplo para as falsas:
   ① Se $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot \vec{w}$ então $\vec{v} = \vec{w}$.
   ② Se a medida angular entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$ é π radianos então $\vec{u} = -\vec{v}$.
   ③ Para quaisquer vetores $\vec{u}, \vec{v}$ tem-se $|\vec{u} \cdot \vec{v}| \leq |\vec{u}||\vec{v}|$.
   ④ Se $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ então $\vec{u} = 0$ ou $\vec{v} = 0$.
   ⑤ Se $\vec{u} \perp \vec{v}$ então $|\vec{u} + \vec{v}| = |\vec{u} - \vec{v}|$.
   ⑥ Se $\vec{u} \cdot \vec{u} = 0$ então $\vec{u} = 0$

10. Mostre que $(\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}-\vec{v}) = |\vec{u}|^2 - |\vec{v}|^2$. Conclua que as diagonais de um paralelogramo são ortogonais se e só se o paralelogramo é um losango.

11. Mostre que $|\vec{u}+\vec{v}|^2 + |\vec{u}-\vec{v}|^2 = 2(|\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2)$. Interprete esta igualdade geometricamente.

12. Em um quadrado $ABCD$ cujos lados medem 2, seja M o ponto médio do lado BC. Calcule a medida angular entre $\overrightarrow{DM}$ e $\overrightarrow{BD}$. (Dica: Escreva os dois últimos vetores como combinação linear de $\overrightarrow{DC}$ e $\overrightarrow{DA}$.)

13. Mostre que em um tetraedro regular duas arestas opostas são ortogonais.

14. A medida angular entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$ é $\pi/4$ radianos, $|\vec{u}| = \sqrt{5}$ e $|\vec{v}| = 1$. Calcule a medida angular entre $\vec{u}+\vec{v}$ e $\vec{u}-\vec{v}$.

15. Calcule a projeção ortogonal de $\vec{u}$ sobre $\vec{v}$:

    (a) $\vec{u} = (1,-1,2)$, $\vec{v} = (3,-1,1)$;
    (b) $\vec{u} = (1,3,5)$, $\vec{v} = (-3,1,0)$;
    (c) $\vec{u} = (1,2,4)$, $\vec{v} = (-2,-4,-8)$;
    (d) $\vec{u} = (-1,1,1)$, $\vec{v} = (-2,1,2)$.

16. Determine todos os vetores unitários $\vec{u} = (x,y,z)$ cuja projeção ortogonal sobre $\vec{k}$ é $\vec{k}/2$ e tais que a medida angular entre $\vec{v} = (x,y,0)$ e $\vec{i}$ seja $\pi/6$ radianos.

17. Verdadeiro ou Falso? Prove as afirmações verdadeiras e ache um contra-exemplo para as falsas:

    ① $\text{proj}_{\vec{u}}\vec{v} = \text{proj}_{\vec{v}}\vec{u}$ quaisquer que sejam $\vec{u}$ e $\vec{v}$.
    ② Se $\text{proj}_{\vec{u}}\vec{v} = \text{proj}_{\vec{v}}\vec{u}$ então $\vec{u} = \vec{v}$.
    ③ Se $\vec{u},\vec{v}$ não são paralelos e $\text{proj}_{\vec{u}}\vec{v} = \text{proj}_{\vec{v}}\vec{u}$ então $u \perp \vec{v}$.
    ④ Se $\text{proj}_{\vec{u}}\vec{v} = \vec{u}$ então $\vec{v}-\vec{u}$ é ortogonal a $\vec{u}$.
    ⑤ Se $\text{proj}_{\vec{u}}\vec{v} = 0$ então $\vec{v} = 0$.

18. Mostre que se $\vec{u},\vec{v}$ são não-nulos, então

$$\text{proj}_{\vec{v}}(\text{proj}_{\vec{u}}\vec{v}) = \frac{(\vec{u}\cdot\vec{v})^2}{|\vec{u}|^2|\vec{v}|^2}\vec{v}.$$

19. Mostre que $\vec{u} = \text{proj}_{\vec{i}}\vec{u} + \text{proj}_{\vec{j}}\vec{u} + \text{proj}_{\vec{k}}\vec{u}$ para qualquer vetor $\vec{u}$. Mostre também que $\text{proj}_{\vec{v}}\vec{u} = \text{proj}_{\lambda\vec{v}}\vec{u}$ para qualquer $\lambda \neq 0$.

20. Sejam A,B,C pontos tais que $\overrightarrow{AB} = (2,\sqrt{3},1)$ e $\overrightarrow{AC} = (-1,\sqrt{3},1)$. Calcule o comprimento da altura relativa ao vértice A do triângulo ABC e a área do triângulo ABC.

21. Aplique o processo de Gram-Schmidt para obter uma base ortonormal a partir do conjunto $\{\vec{u}_1,\vec{u}_2,\vec{u}_3\}$, onde $\vec{u}_1 = (1,2,2)$, $\vec{u}_2 = (1,0,1)$ e $\vec{u}_3 = (1,1,1)$.

✰ Orientação

22. Classifique as bases abaixo, duas a duas, em concordantes ou discordantes:

① $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$

② $\{2\vec{i} - \vec{j} - \vec{k}, \vec{i} + \vec{k}, \vec{i}\}$

③ $\{\vec{i} - \vec{k}, \vec{i} - \vec{j} + \vec{k}, \vec{j} + \vec{k}\}$

④ $\{\vec{j}, \vec{i} + \vec{j} - \vec{k}, -\vec{i} + \vec{j}\}$

✰ Produto Vetorial

23. Calcule o produto vetorial de $\vec{u}$ e $\vec{v}$ nos seguintes casos:

    (a) $\vec{u} = (1,0,1)$, $\vec{v} = (0,1,2)$;

    (b) $\vec{u} = (1,2,3)$, $\vec{v} = (-2,-4,-6)$;

    (c) $\vec{u} = (1,-1,2)$, $\vec{v} = (2,0,-1)$;

    (d) $\vec{u} = (0,-1,3)$, $\vec{v} = (1,1,1)$.

24. Encontre todos os vetores $\vec{u}$ de norma 1 tais que $\vec{u} \wedge (\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}) = \vec{i} - \vec{k}$. Para qual deles a base $\{\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}, \vec{u}, \vec{i} - \vec{k}\}$ é positiva?

25. Descreva o conjunto solução das seguintes equações:

    (a) $\vec{u} \wedge (\vec{i} - \vec{j} - 4\vec{k}) = 4\vec{i}$

    (b) $\vec{u} \wedge (\vec{i} - 2\vec{k}) = 0$

    (c) $\vec{u} \wedge \vec{i} = \vec{k}$

    (d) $\vec{u} \wedge \vec{j} = \vec{k}$

    (e) $\vec{u} \wedge \vec{k} = \vec{j}$

26. Determine $\vec{u}$ de norma $\sqrt{3}$ ortogonal a $\vec{i} + \vec{j}$ e a $-\vec{i} + \vec{k}$ que forma um ângulo agudo com o vetor $\vec{j}$.

27. Encontre $\vec{u}$ de norma $\sqrt{6}$ tal que $\vec{u} \wedge (\vec{i} + \vec{k}) = 2(\vec{i} + \vec{j} - \vec{k})$.

28. Sejam $\vec{u} = (1,1,1)$ e $\vec{v} = (0,1,2)$. Encontre uma base ortonormal positiva $\{\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3\}$ tal que:

    (a) $\vec{w}_1$ e $\vec{u}$ sejam paralelos com o mesmo sentido;

    (b) $\vec{w}_2$ seja combinação linear de $\vec{u}$ e $\vec{v}$;

    (c) $\vec{w}_3 \cdot \vec{k} > 0$.

29. Mostre que para qualquer vetor $\vec{v}$, tem-se

$$|\vec{v} \wedge \vec{i}|^2 + |\vec{v} \wedge \vec{j}|^2 + |\vec{v} \wedge \vec{k}|^2 = 2|\vec{v}|^2$$

30. O lado do quadrado $ABCD$ mede 2 e M é o ponto médio do lado BC. Calcule $|\overrightarrow{DM} \wedge \overrightarrow{DB}|$.

31. ABC é um triângulo e P, Q são pontos tais que $3\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AC}$ e $3\overrightarrow{BQ} = 2\overrightarrow{BC}$. Calcule a razão entre as áreas dos triângulos BPQ e ABC.

32. Resolva os seguintes sistemas:

(a) $\begin{cases} \vec{u} \wedge (\vec{i} + \vec{j}) & = & -\vec{i} + \vec{j} \\ \vec{u} \cdot (\vec{i} + \vec{j}) & = & 2 \end{cases}$

(b) $\begin{cases} \vec{u} \wedge (\vec{i} - \vec{k}) & = & \vec{j} \\ \vec{u} + \vec{v} & = & \vec{i} + \vec{j} \\ |\vec{u}| = 1 \end{cases}$

(c) $\begin{cases} (\vec{u} + \vec{i} - 2\vec{k}) \wedge (\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}) & = & -\vec{i} + \vec{j} + \vec{k} \\ \vec{u} \cdot (\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}) & = & 10 \end{cases}$

33. Verdadeiro ou Falso? Prove as afirmações verdadeiras e ache um contra-exemplo para as falsas:

① Se $\vec{u}, \vec{v}$ são paralelos então $\vec{u} \wedge \vec{v} = 0$.

② Se $\vec{u} \wedge \vec{v} = 0$ então $\vec{u}, \vec{v}$ são paralelos.

③ Se $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{u} \wedge \vec{w}$ então $\vec{v} = \vec{w}$.

④ $|\vec{u} \wedge \vec{v}| = |\vec{u}||\vec{v}|$.

⑤ Se $\vec{u} \wedge \vec{v} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$ então $\alpha = \beta = 0$.

⑥ Se $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ é LI e $\vec{u} \wedge \vec{v} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$ então $\alpha = \beta = 0$.

⑦ A base $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{v} \wedge \vec{u}\}$ é positiva.

⑧ Se $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ é LI e $\vec{w}$ é ortogonal a $\vec{u}$ e a $\vec{v}$ então $\vec{w}$ é paralelo a $\vec{u} \wedge \vec{v}$.

⑨ Para quaisquer $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ tem-se que $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{w} = \vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w})$.

⑩ Para quaisquer $\vec{u}, \vec{v}$ tem-se $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{v} \wedge \vec{u}$.

34. Neste exercício, vamos estudar o produto vetorial $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{w}$.

(a) Mostre que existem $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tais que $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{w} = \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$.

(b) Assumindo que $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ seja LI, vamos construir uma nova base ortonormal $E = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ da seguinte forma: tomamos $\vec{u}_1$ paralelo a $\vec{u}$ e $\vec{u}_2$ como combinação linear de $\vec{u}$ e $\vec{v}$. Mostre que $\vec{u} = (a_1, 0, 0)_E$ e $\vec{u}_2 = (a_2, b_2, 0)_E$.

(c) Pondo $\vec{u}_3 = (a_3, b_3, c_3)_E$, mostre que $\vec{u} \wedge \vec{v} = (0, 0, a_1 b_2)_E$ e $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{w} = (-a_1 b_2 b_3, a_1 a_3 b_2, 0)_E$.

(d) Use o ítem (1) para mostrar que $\mu = a_1 a_3 =$ e $\lambda = -(a_2 a_3 - b_2 b_3)$.

(e) Conclua que $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{w} = -(\vec{v} \cdot \vec{w})\vec{u} + (\vec{u} \cdot \vec{w})\vec{v}$, para quaisquer vetores $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$.

(f) Mostre que $\vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w}) = (\vec{u} \cdot \vec{w})\vec{v} - (\vec{u} \cdot \vec{v})\vec{w}$, para quaisquer vetores $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$.

(g) Conclua a *Identidade de Jacobi*: $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{w} + (\vec{v} \wedge \vec{w}) \wedge \vec{u} + (\vec{w} \wedge \vec{u}) \wedge \vec{v} = 0$.

(h) Mostre que $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{w} = \vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w})$ se e só se $\vec{u}$ e $\vec{w}$ são paralelos ou se $\vec{u}, \vec{w}$ são ortogonais a $\vec{v}$.

☆ **Respostas**

(1) (a) $x = -9$, (b) $x = -2$, (c) $x = \pm\sqrt{6}$
(2)(a) $\theta = \pi/2$, (b) $\theta = \arccos(1/3)$, (c) $\theta = 3\pi/4$
(3) $(3, -3, -3)$, **(4)** $(1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}, 1)$ e $(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, -1)$
(5) $\vec{z} = (\pm 1, 0, \pm 2)$; **(6)** $\vec{w} = \lambda(7, 8, -11)$, com $\lambda \neq 0$
(7) $\vec{u} = (1, 2, 3)$; **(12)** $\theta = \arccos(-3/\sqrt{10})$
(14) $\theta = \arccos(4/\sqrt{26})$
(15) (a)$\frac{1}{11}(18, -6, 6)$, (b) $(0, 0, 0)$, (c) $(1, 2, 4)$ (d) $\frac{1}{9}(-10, 5, 10)$
(16) $(3/4, -\sqrt{3}/4, 1/2)$ e $(3/4, \sqrt{3}/4, 1/2)$; **(20)** 2 e 3
(21) $\vec{v}_1 = \frac{1}{3}(1, 2, 2)$, $\vec{v}_2 = \frac{1}{3}(2, -2, 1)$, $\vec{v}_3 = \frac{1}{3}(2, 1, -2)$
(22) ① e ④ são positivas e as demais são negativas
(23) (a) $(-1, -2, 1)$, (b) $(0, 0, 0)$ (c) $(1, 5, 2)$ (d) $(-4, 3, 1)$
(24) $\vec{u} = (0, 1, 0)$ ou $\vec{u} = \frac{1}{3}(-2, 1, -2)$; para o segundo vetor
(25) (a) $\emptyset$; (b) $\vec{u} = a(1, 0, -2)$, $a \in \mathbb{R}$; (c) $\vec{u} = (a, -1, 0)$, $a \in \mathbb{R}$;
(c) $\vec{u} = (1, b, 0)$, $b \in \mathbb{R}$; (c) $\vec{u} = (-1, 0, c)$, $c \in \mathbb{R}$.
(26) $\vec{u} = (-1, 1, -1)$; **(27)** $\vec{u} = (-1, 2, 1)$;
(28) $\vec{w}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)$, $\vec{w}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, -1)$, $\vec{w}_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(-1, 2, -1)$
(30) 2; **(31)** 4/9; **(32)** (1) $\vec{u} = (1, 1, 1)$;
(2) $\vec{u} = (0, 0, 1)$, $\vec{v} = (1, 1, -1)$ ou $\vec{u} = (1, 0, 0)$, $\vec{v} = (0, 1, -1)$
(3) $\vec{u} = (3/2, 4, 1/2)$

Parte 4

As coordenadas referem-se a um sistema de coordenadas fixo $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$

✰ Sistemas de coordenadas

1. Sejam $A=(3,0,-1)$, $B=(0,3,0)$, $C=(5,1,-2)$ e $D=(-4,1,2)$. Mostre que estes pontos são vértices de um trapézio e diga quais são as bases e os lados não-paralelos
2. Sejam $A=(1,6,4)$, $B=(2,-1,9)$, $C=(1,1,-1)$ e $D=(1,1,a)$. Determine para que valores de a os pontos A,B,C,D são vértices de um quadrilátero.
3. Calcule as coordenadas do ponto médio M do segmento $\overrightarrow{AB}$, onde $A=(1,2,3)$ e $B=(-2,-6,1)$.
4. Dados $A=(-2,a,0)$ e $B=(2,1,a)$, calcule o valor de a para o qual a distância entre A e B é $\sqrt{15}$.
5. Sejam $A=(-1,0,2)$, $B=(1,1,1)$ e $C=(1,0,1)$. Mostre que o triângulo ABC é retângulo.
6. Sejam $A=(1,2,-1)$, $B=(0,1,1)$ e $C=(2,0,0)$. Mostre que o triângulo ABC é equilátero.
7. Dados $A=(-1,2,3)$ e $B=(3,-2,0)$ encontre as coordenadas dos pontos C,D que são colineares com A e B e dividem o segmento $\overline{AB}$ em três partes iguais.

✰ Equação da reta

8. Sejam $A=(-5,2,3)$ e $B=(4,-7,-6)$ e $C=(3,1,4)$.
   (a) Escreva as equações vetorial, paramétrica e simétrica da reta que passa por A e B.
   (b) Faça o mesmo para a reta que passa por B e C.
   (c) Conclua que A,B,C são colineares.
9. Calcule a equação vetorial da reta que passa por $A=(1,0,1)$ e $B=(2,1,-1)$.
10. Calcule um vetor diretor para a reta $\frac{2x-1}{2}=1-y=3z+3$. Escreva esta última equação na forma vetorial.
11. Considere a reta r de equações
$$\left\{\begin{array}{rcl} x &=& 1-\lambda \\ y &=& -2+3\lambda \\ z &=& 2-\lambda \end{array}\right. .$$
   (a) Obtenha a equação vetorial da reta paralela a r que passa pelo ponto $(-1,2,7)$.
   (b) Verifique se $Q=(2,2,4)$ pertence a r.
   (c) Mostre que a reta definida pelas equações
$$\left\{\begin{array}{rcl} x &=& -4+2\lambda \\ y &=& 13-6\lambda \\ z &=& -3+2\lambda \end{array}\right.$$
   coincide com r.

(d) Calcule a equação simétrica de r.

(e) Ache os pontos P de r tais que a distância entre P e $(1,0,2)$ é $\sqrt{3}$.

12. Sejam $A = (1,1,1)$, $B = (0,0,1)$ e r a reta $(x, y, z) = (1,0,0) + \lambda(1,1,1)$. Determine os pontos P de r equidistantes de A e B.

13. Considere as equações abaixo:

(a) $\frac{3x+3}{6} = \frac{y-2}{6} = -2z+4$

(b) $(x, y, z) = (1,0,1) + \lambda(7,2,-2)$

(c) $\begin{cases} x = -1+2\lambda \\ y = 2+6\lambda \\ z = 2-\lambda/2 \end{cases}$

(d) $(x, y, z) = (8,2,-1) + \lambda(1,0,2)$

(e) $\begin{cases} x = 10-3\lambda \\ y = 2 \\ z = 3-6\lambda \end{cases}$

(f) $\frac{x-1}{7} = \frac{y}{2} = \frac{z-1}{-2}$

(g) $(x, y, z) = (1,8,3/2) + \lambda(4,12,-1)$

(h) $\frac{x+6}{7} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-3}{-2}$

Analise quais delas definem a mesma reta.

14. Sejam $P = (2,1,-1)$, $Q = (0,-1,0)$, $A = (0,3,0)$ e $B = (6,3,3)$. Determine um ponto C pertencente à reta que passa por P e Q tal que a área do triângulo ABC seja 9.

15. Escreva a equação simétrica da reta que passa pelo ponto $A = (-1,-4,-2)$ e pelo ponto médio do segmento de extremidades $(1,3,5)$ e $(3,-3,1)$.

16. Sejam $A = (1,2,-1)$ e $B = (0,1,2)$ e considere a reta r que passa pelo ponto $(0,2,0)$ e tem a direção do vetor $(2,-2,1)$. Encontre os pontos C de r tais que o triângulo ABC tem um ângulo reto no vértice C.

17. Sejam $A = (3,6,-7)$, $B = (-5,2,3)$ e $C = (4,-7,-6)$. Verifique que ABC é um triângulo e escreva as equações paramétricas da reta que contém a mediana relativa ao vértice C.

☆ **Respostas**

(1) $\overrightarrow{DB}, \overrightarrow{AC}$ são os lados paralelos e $\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{CB}$ são os lados não-paralelos. **(2)** $a \neq -1$;
(3) $M = (-1/2, -2, 2)$; **(4)** $a = 1$ **(7)** $C = (0, 2, 2)$, $D = (1, 0, 1)$
(8) $(x, y, z) = (4, -7, -6) + \lambda(1, -1, -1)$; $x = 4 + \lambda,\ y = -7 - \lambda,\ z = -6 - \lambda$; $\frac{x-4}{-1} = \frac{y+7}{1} = \frac{z+6}{1}$
(9) $(x, y, z) = (1, 0, 1) + \lambda(1, 1, 0)$
(10) $\vec{v} = (3, -3, 1)$; $(x, y, z) = (1/2, 1, -1) + \lambda(3, -3, 1)$
(11) (a) $(x, y, z) = (-1, 2, 7) + \lambda(-1, 3, -1)$; (b) $Q \notin r$; (d) $\frac{x-1}{-1} = \frac{y+2}{3} = \frac{z-2}{-1}$; (e) $P = (0, 1, 1)$ e $P = (\frac{10}{11}, -\frac{19}{11}, \frac{20}{11})$. **(12)** $P = (1, 0, 0)$;
(13) (a),(c),(g) ; (b),(f),(h) e (d),(e) definem as mesmas retas, sendo que as três são distintas entre si. **(14)** $C = (2, 1, -1)$ ou $C = (22/9, 13/9, -11/9)$. **(15)** $\frac{x+1}{3} = \frac{y+4}{4} = \frac{z+2}{5}$

(16) $C = (\frac{5\pm\sqrt{97}}{9}, \frac{13\mp\sqrt{97}}{9}, \frac{5\pm\sqrt{97}}{18})$; **(17)** $\left\{\begin{array}{lcl} x & = & 4 + 5\lambda \\ y & = & -7 - 11\lambda \\ z & = & -6 - 4\lambda \end{array}\right.$

Parte 5

As coordenadas referem-se a um sistema de coordenadas fixo $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$

1. Verifique se as equações abaixo determinam o mesmo plano:

   ① $(x,y,z)=(1,2,1)+\lambda(1,-1,2)+\mu(-1/2,2/3,-1)$ e $(x,y,z)=(1,2,1)+\lambda(-1,1,2)+\mu(-3,4,-6)$

   ② $(x,y,z)=(1,1,1)+\lambda(2,3,-1)+\mu(-1,1,1)$ e $(x,y,z)=(1,6,2)+\lambda(-1,1,1)+\mu(2,3,-1)$

   ③ $(x,y,z)=(0,0,0)+\lambda(1,1,0)+\mu(0,1,0)$ e $(x,y,z)=(1,1,0)+\lambda(1,2,1)+\mu(0,-1,1)$

   ④ $(x,y,z)=(2,1,3)+\lambda(1,1,-1)+\mu(1,0,1)$ e $(x,y,z)=(0,1,1)+\lambda(1,3,-5)+\mu(1,-1,-3)$

2. Escreva uma equação vetorial, equações paramétricas e uma equação normal para os planos π abaixo:

   ① π contém $P=(1,2,0)$ e é paralelo aos vetores $\vec{u}=(1,1,0)$ e $\vec{v}=(2,3,-1)$;

   ② π contém $P=(1,1,0)$, $Q=(1,-1,-1)$ e é paralelo ao vetor $\vec{v}=(2,1,0)$;

   ③ π contém $P=(1,0,1)$, $Q=(0,1,-1)$ e é paralelo ao segmento de extremidades $A=(1,2,1)$ e $B=(0,1,0)$

   ④ π contém os pontos $P=(1,0,1)$, $Q=(2,1,-1)$ e $R=(1,-1,0)$

   ⑤ π contém os pontos $P=(1,0,2)$, $Q=(-1,1,3)$ e $R=(3,-1,1)$

   ⑥ π contém $P=(1,0,-1)$ e a reta $r:\frac{x-1}{2}=\frac{y}{3}=2-z$

   ⑦ π contém $P=(1,-,1,1)$ e a reta $r:(x,y,z)=(0,2,2)+\lambda(1,1,-1)$

3. Obtenha equações paramétricas do plano que contém $P=(1,1,2)$ e é paralelo ao plano

$$\pi:\begin{cases} x &=& 1+\lambda+2\mu \\ y &=& 2\lambda+\mu \\ z &=& -\lambda \end{cases}.$$

4. Decomponha o vetor $\vec{u}=(1,2,4)$ como soma de um vetor paralelo à reta $r:(x,y,z)=(1,9,18)+\lambda(2,1,0)$ e de um vetor paralelo ao plano $\pi:(x,y,z)=(1,1,0)+\lambda(1,0,1)+\mu(0,1,-1)$.

5. Verifique se o vetor $\vec{u}$ é paralelo ao plano π se:

   ① $\vec{u}=(1,2,1)$ e $\pi:3x+y-5z=-1$;

   ② $\vec{u}=(-1,4,0)$ e $\pi:(x,y,z)=(4,8,-17)+\lambda(1,0,1)+\mu(2,-1,1)$;

   ③ $\vec{u}=(2011,0,-2011)$ e $\pi:\begin{cases} x &=& 1-\lambda-\mu \\ y &=& 20+\lambda+3\mu \\ z &=& 51-\lambda-\mu \end{cases}$;

   ④ $\vec{u}=(1,1,2)$ e $\pi:x-4y+3z=13$.

6. Verifique se o vetor $\vec{u}$ é normal ao plano π se:

   ① $\vec{u}=(-1,3,2)$ e $\pi:3x-9y-6z=5$;

   ② $\vec{u}=(6,6,-6)$ e $\pi:(x,y,z)=(-4,1,-1)+\lambda(1,0,1)+\mu(2,-1,1)$;

③ $\vec{u} = (2,1,-2)$ e $\pi : \begin{cases} x = 11 - \lambda - \mu \\ y = \lambda + 3\mu \\ z = 5 - \lambda - \mu \end{cases}$;

④ $\vec{u} = (1,1,2)$ e $\pi : 3x - 4y + 5z = 7$.

7. Esboce os planos abaixo:

① $x = 2$

② $y = -1$

③ $z = 0$

④ $x + y = 1$

⑤ $y - z = 0$

⑥ $x + y + z = 1$

8. Obtenha uma equação geral (normal) para os planos π abaixo:

① $\pi : \begin{cases} x = 1 + \lambda - \mu \\ y = 2\lambda + \mu \\ z = 3 - \mu \end{cases}$

② $\pi : \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 2 \\ z = 3 - \lambda + \mu \end{cases}$

③ $(x, y, z) = (-2, 2, 0) + \lambda(1, 2, 1) + \mu(-1, 2, 1)$

④ $(x, y, z) = (0, 0, 0) + \lambda(1, 1, 3) + \mu(-3, 2, -1)$

9. Obtenha uma equação vetorial para os planos π abaixo:

① $4x + 2y - z + 5 = 0$

② $5x - y - 1 = 0$

③ $z - 3 = 0$

④ $y - z - 2 = 0$

10. Determine a posição relativa das retas abaixo e, se for caso, determine seu ponto de intersecção:

① $r : (x, y, z) = (1, 1, 0) + \lambda(1, 2, 3)$ e $s : (x, y, z) = (2, 3, 3) + \lambda(3, 2, 1)$

② $r : \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = \lambda \\ z = 1 + 3\lambda \end{cases}$ e $s : \frac{x+1}{4} = \frac{y+1}{2} = \frac{z+2}{6}$

③ $r : \begin{cases} x = 2\lambda \\ y = 1 - 2\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$ e $s : (x, y, z) = (2, 4, 11) + \lambda(-4, 5, 0)$

④ $r : \frac{x-2}{3} = \frac{y+2}{4} = z$ e $s : \begin{cases} x = 4\lambda \\ y = 2\lambda \\ z = 3 + 2\lambda \end{cases}$

11. Mostre que r e s são concorrentes, ache seu ponto de intersecção e determine uma equação geral para o plano que contém r e s:

① $r: \begin{cases} x = \lambda \\ y = -\lambda \\ z = 1+4\lambda \end{cases}$ e $s: \frac{x-1}{3} = \frac{y-5}{3} = \frac{2+z}{5}$

② $r: \begin{cases} x = 2-2\lambda \\ y = 4+\lambda \\ z = -3\lambda \end{cases}$ e $s: \begin{cases} x = 1+\lambda \\ y = -2\lambda \\ z = 2\lambda \end{cases}$

③ $r: \frac{x-3}{2} = \frac{y-6}{2} = z-1$ e $s: \frac{x}{2} = \frac{y}{8} = \frac{z+4}{8}$

12. Obtenha a intersecção da reta r com o plano π:

① $r: (x,y,z) = (-1,-1,0) + \lambda(1,-1,-1)$, $\pi: x+y+z+1 = 0$

② $r: (x,y,z) = (-1,-1,1) + \lambda(1,-1,0)$, $\pi: x+y+z+1 = 0$

③ $r: x-3 = y-2 = \frac{z+1}{2}$, $\pi: x+2y-z = 10$

④ $r: (x,y,z) = (-1,-1,0) + \lambda(1,-1,0)$, $\pi: 2x+2y+z+1 = 0$

⑤ $r: \begin{cases} x = 2\lambda \\ y = \lambda \\ z = 1-3\lambda \end{cases}$ e $s: \begin{cases} x = 1+\alpha \\ y = -3+\beta \\ z = 1+\alpha+\beta \end{cases}$

⑥ $r: x-3 = y = \frac{z+1}{2}$ e $\pi: (x,y,z) = (0,0,0) + \lambda(1,2,0) + \mu(0,-1,3)$

13. Considere os pontos $A = (1,1,2)$, $B = (0,1,2)$, $C = (1,1,0)$ e $D = (0,1,0)$. Mostre que A, B, C, D são vértices de um retângulo e obtenha as equações normal, paramétrica e vetorial do plano que contém A, B, C e D.

14. Determine a intersecção dos planos π_1 e π_2. Quando se tratar de uma reta, descreva-a por equações vetoriais.

① $\pi_1: x+2y-z-1 = 0$ e $\pi_2: 2x+y-z = 1$

② $\pi_1: z = 1$ e $\pi_2: y-2x+2 = 0$

③ $\pi_1: x-y+3z = 1$ e $\pi_2: 2x-2y+6z = 2$

④ $\pi_1: 3x-4y+2z = 4$ e $\pi_2: -$ň$5x+20y-10z = 9$

⑤ $\pi_1: x+y-z = 0$ e $\pi_2: (x,y,z) = (1,0,0)+\lambda(1,2,0)+\mu(0,-1,2)$ $\pi_1 \cap \pi_2: (x,y,z) = (1,-1/3,2/3)+\lambda(1,1,2)$

⑥ $\pi_1: (x,y,z) = (1,1,1) + \lambda(0,2,0) + \mu(1,0,-1)$ e $\pi_2: (x,y,z) = (0,0,-1) + \lambda(1,-1,0) + \mu(1,0,1)$

⑦ $\pi_1: (x,y,z) = (3,0,2) + \lambda(0,-1,2) + \mu(0,0,-1)$ e $\pi_2: (x,y,z) = (3,1,2) + \lambda(1,0,0) + \mu(1,1,1)$

15. Estude a posição relativa de r e s:

① $(x,y,z) = (1,-1,1) + \lambda(-2,1,-1)$ e $s: \begin{cases} y+z = 3 \\ x+y-z = 6 \end{cases}$

② $r: \begin{cases} x-y-z = 2 \\ x+y-z = 0 \end{cases}$ e $s: \begin{cases} 2x-3y+z = 5 \\ x+y-2z = 0 \end{cases}$

③ $r: \frac{x+1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z+1}{2}$ e $s: (x,y,z) = (0,0,0) + \lambda(1,2,0)$

④ $r: \frac{x+3}{2} = \frac{y-1}{4} = z$ e $s: \begin{cases} 2x - y + 7 &= 0 \\ x + y - 6z &= -2 \end{cases}$

⑤ $(x, y, z) = (8, 1, 9) + \lambda(2, -1, 3)$ e $s: (x, y, z) = (3, -4, 4) + \lambda(1, -2, 2)$

⑥ $r: \frac{x-1}{3} = \frac{y-5}{3} = \frac{z+2}{5}$ e $r: x = -y = \frac{z-1}{4}$

⑦ $r: \frac{x+1}{2} = y = -z$ e $s: \begin{cases} x + y - 3z &= 1 \\ 2x - y - 2z &= 0 \end{cases}$

⑧ $r: x + 3 = \frac{2y-4}{4} = \frac{z-1}{3}$ e $s: (x, y, z) = (0, 2, 2) + \lambda(1, 1, -1)$

16. Considere as retas $r: \begin{cases} x - \alpha y + 1 &= 0 \\ y - z - 1 &= 0 \end{cases}$, $s: x = y/\alpha = z$ e $t: \begin{cases} x + y - z &= 0 \\ y + z + 1 &= 0 \end{cases}$. Calcule o valor de α que torna:

① r e s paralelas;

② r, s, t paralelas a um mesmo plano;

③ r e t concorrentes;

④ s e t coplanares;

⑤ r e s reversas.

17. Mostre que r e s determinam um plano π e obtenha uma equação geral de π:

① $r: x - 1 = y = 2z$ e $s: x - 1 = y = z$

② $r: (x-1)/2 = y - 3)/3 = z/4$ e $s: x/2 = y/3 = (z-4)/4$

18. Estude a posição relativa de r e π e, quando for o caso, encontre o ponto de intersecção:

① $r: (x, y, z) = (1, 1, 0) + \lambda(0, 1, 1)$ e $\pi: x - y - z = 2$

② $r: (x-1)/2 = y = z$ e $\pi: (x, y, z) = (3, 0, 1) + \lambda(1, 0, 1) + \mu(2, 2, 0)$

③ $r: \begin{cases} x - y + z &= 0 \\ 2x + y - z - 1 &= 0 \end{cases}$ e $\pi: (x, y, z) = (0, 1/2, 0) + \lambda(1, -1/2, 0) + \mu(0, 1, 1)$

④ $r: \begin{cases} x - y &= 1 \\ x - 2y &= 0 \end{cases}$ e $\pi: x + y = 2$

⑤ $r: (x, y, z) = (0, 0, 0) + \lambda(1, 4, 1)$ e $\pi: (x, y, z) = (1, -1, 1) + \lambda(0, 1, 2) + \mu(1, -1, 0)$

⑥ $r: \frac{x+2}{3} = y - 1 = \frac{z+3}{3}$ e $\pi: 3x - 6y - z = 0$

19. Para que valores de α a reta $r: \frac{x-1}{\alpha} = \frac{y}{1} = \frac{z}{2}$ é transversal ao plano $\pi: x + \alpha y + z = 0$?

20. Estude a posição relativa dos planos π_1 e π_2:

① $\pi_1: (x, y, z) = (1, 1, 1) + \lambda(0, 1, 1) + \mu(-1, 2, 1)$ e $\pi_2: (x, y, z) = (1, 0, 0) + \lambda(1, -1, 0) + \mu(-1, -1, -2)$

② $\pi_1: (x, y, z) = (4, 2, 4) + \lambda(1, 1, 2) + \mu(3, 3, 1)$ e $\pi_2: (x, y, z) = (3, 0, 0) + \lambda(1, 1, 0) + \mu(0, 1, 4)$

③ $\pi_1: 2x - y + 2z - 1 = 0$ e $\pi_2: 4x - 2y + 4z = 0$

④ $\pi_1: x - y + 2z - 2 = 0$ e $\pi_2: (x, y, z) = (0, 0, 1) + \lambda(1, 0, 3) + \mu(-1, 1, 1)$

21. Determine, em função de α, a posição relativa dos planos $\pi_1: 2x + y + 3z + 1 = 0$ e $\pi_2: (x, y, z) = (1, 1, 1) + \lambda(1, 1, 0) + \mu(2, -1, \alpha)$.

22. Verifique se as retas abaixo são perpendiculares ou ortogonais:

① $r : (x, y, z) = (1, 2, 3) + \lambda(1, 2, 1)$ e $s : (x, y, z) = (2, 4, 4) + \lambda(-1, 1, -1)$

② $r : x + 3 = y = z/3$ e $s : (x - 4)/2 = y - 4 = -z$

③ $r : (x, y, z) = (1, 2, 3) + \lambda(-1, 2, 1)$ e $s : (x, y, z) = (0, 0, 0) + \lambda(1, 1, -1)$

④ $r : (x, y, z) = (2, -5, 1) + \lambda(3, -2, -1)$ e $s : (x - 4)/2 = (y - 2)/3 = (z + 4)/(-5)$

23. Obtenha uma equação geral do plano π que contém o ponto P e é perpendicular à reta r:

① $P = (0, 1, -1)$ e r contém $A = (1, -1, 1)$ e $B = (-1, 1, -1)$

② $P = (1, 1, -1)$ e $r : \begin{cases} x - 2y + z &= 0 \\ 2x - 3y + z - 1 &= 0 \end{cases}$

24. Determine a projeção ortogonal da reta $r : x + 1 = y + 2 = 3z - 3$ sobre o plano $\pi : x - y + 2z = 0$.

25. Verifique se π_1 e π_2 são perpendiculares:

① $\pi_1 : (x, y, z) = (1, -3, 4) + \lambda(1, 0, 3) + \mu(0, 1, 3)$ e $\pi_2 : (x, y, z) = (0, 0, 0) + \lambda(1, 1, 6) + \mu(1, -1, 0)$

② $\pi_1 : (x, y, z) = (4, 3, 1) + \lambda(1, 0, 1) + \mu(3, 1, 0)$ e $\pi_2 : y - 3z = 0$

26. Obtenha uma equação geral do plano π que contém a reta $r : (x, y, z) = (1, 0, 2) + \lambda(4, 1, 0)$ e é perpendicular a $\pi_1 : 3x + y + z = 0$.

27. Obtenha uma equação geral do plano que contém o ponto $(2, 1, 0)$ e é perpendicular aos planos $\pi_1 : x + 2y - 3z + 4 = 0$ e $\pi_2 : 8x - 4y + 16z - 1 = 0$.

✰ **Respostas**

(1) Somente as equações em ①,② e ④ determinam o mesmo plano
(2) ① $\pi : (x, y, z) = (1,2,0) + \lambda(1,1,0) + \mu(2,3,-1)$; $\pi : -x + y + z = 1$;
② $\pi : (x, y, z) = (1,1,0) + \lambda(0,2,1) + \mu(2,1,0)$; $\pi : -x + 2y - 4z = 1$;
③ $\pi : (x, y, z) = (1,0,1) + \lambda(1,-1,2) + \mu(1,1,1)$; $\pi : -3x + y + 2z = -1$;
④ $\pi : (x, y, z) = (1,-1,0) + \lambda(-1,-2,1) + \mu(0,1,1)$; $\pi : -3x + y - z = -4$;
⑤ Como P, Q, R são colineares, π não é único. O plano π pode ser qualquer plano determinado por $(x, y, z) = (1,0,2) + \lambda(-2,1,1) + \mu(a,b,c)$, onde $\vec{v} = (a,b,c)$ não é paralelo a $\overrightarrow{PQ} = (-2,1,1)$;
⑥ $\pi : (x, y, z) = (1,0,-1) + \lambda(2,3,-1) + \mu(0,0,3)$; $\pi : 3x - 2y - 3 = 0$;
⑦ $\pi : (x, y, z) = (1,-1,1) + \lambda(1,1,-1) + \mu(-1,3,1)$; $\pi : x + z - 2 = 0$;
(3) $\pi : \begin{cases} x = 1 + \lambda + 2\mu \\ y = 1 + 2\lambda + \mu \\ z = 2 - \lambda \end{cases}$
(4) $\vec{u} = (11,7,4) + (-10,-5,0)$, **(5)** $\vec{u}$ é paralelo a π somente nos ítens ① e ③;
(6) $\vec{u}$ é normal a π somente nos ítens ① e ②;
(8) ① $\pi : 2x - y - 3z + 7 = 0$; ② $y - 2 = 0$; ③ $y - 2z = 0$; ④ $7x + 8y - 5z = 0$
(9) ① $(x, y, z) = (0,0,5) + \lambda(1,0,4) + \mu(0,1,2)$; ② $(x, y, z) = (0,-1,0) + \lambda(1,5,0) + \mu(0,0,1)$;
③ $(x, y, z) = (0,0,3) + \lambda(1,0,0) + \mu(0,1,0)$; ④ $(x, y, z) = (0,2,0) + \lambda(1,1,0) + \mu(0,0,1)$
(10) As retas em ① e ③ são concorrentes com ponto de intersecção $(2,3,3)$ e $(22,-21,11)$, respectivamente. As retas em ② são iguais e as do ítem ④ são reversas.
(11) ① $(-2,2,-7)$, $\pi : -17x + 7y + 6z - 6 = 0$; ② $(-2,6,-6)$, $\pi : 4x - y - 3z - 4 = 0$;
③ $(1,4,0)$, $\pi : 4x - 7y + 6z + 24 = 0$ **(12)** ① $(-2,0,1)$; ② A intersecção é a reta r; ③ $(5,4,3)$; ④ Vazio; ⑤ $(-2/3,-1/3,2)$; ⑥ $(-16/7,-5/7,-81/7)$ **(13)** $y - 1 = 0$;
(14) ① $\pi_1 \cap \pi_2 : (x, y, z) = (0,0,-1) + \lambda(1,1,3)$; ② $\pi_1 \cap \pi_2 : (x, y, z) = (0,-2,1) + \lambda(1,2,0)$;
③ $\pi_1 \cap \pi_2 = \pi_1$; ④ $\pi_1 \cap \pi_2 = \emptyset$; ⑤ $\pi_1 \cap \pi_2 : (x, y, z) = (2,-1,0) + \lambda(1,0,1)$
⑥ $\pi_1 \cap \pi_2 : (x, y, z) = (3,-1,0) + \lambda(0,1,1)$
(15) ① Paralelas distintas; ② Concorrentes em $P = (1,-1,0)$; ③ Reversas; ④ Coincidentes; ⑤ Concorrentes em $P = (-2,6,-6)$; ⑥ Concorrentes em $P = (-2,2,-7)$; ⑦ Reversas; ⑧ Reversas;
(16) ① $\alpha = 1$; ② $\alpha = 1$; ③ α qualquer; ④ Não existe α; ⑤ α diferente de 0 e 1;
(17) ① r e s são concorrentes em $P = (1,0,0)$ e $\pi : x - y - 1 = 0$; ② r e s são paralelas distintas e $\pi : 8x - 4y - z + 4 = 0$
(18) ① r e π são transversais, $P = (1,0,-1)$; ② r é paralela a π; ③ r está contida em π; ④ r e π são paralelos; ⑤ r é transversal a π, $P = (-1/9,-4/9,-1/9)$; ⑥ r é paralela a π; **(19)** $\alpha \neq -2$;
(20) ① Iguais; ② Transversais; ③ Paralelos distintos; ④ Transversais;
(21) π_1 e π_2 são transversais para qualquer valor de α;
(22) ① Perpendiculares; ② Perpendiculares; ③ Ortogonais e não-perpendiculares; ④ Não são ortogonais; **(23)** ① $x - y + z = 0$; ② $x + y + z - 1 = 0$; **(24)** $(x, y, z) = (-3/2,-3/2,0) + \lambda(8,10,1)$
(25) ① Não; ② Sim; **(26)** $x - 4y + z - 3 = 0$; **(27)** $x - 2y - z = 0$

Parte 6

As coordenadas referem-se a um sistema de coordenadas fixo $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

✰ Distância

1. Determine os pontos da reta r que equidistam de A e B:

   ① $r : (x, y, z) = (2, 3, -3) + \lambda(1, 1, 1)$, $A = (1, 1, 0)$ e $B = (2, 2, 4)$

   ② $r : x - 1 : 2y = z$, $A = (1, 1, 0)$ e $B = (0, 1, 1)$

   ③ $r : (x, y, z) = (0, 0, 4) + \lambda(4, 2, -3)$, $A = (2, 2, 5)$ e $B = (0, 0, 1)$

2. Calcule a distância de P a r:

   ① $P = (0, -1, 0)$ e $r : x = 2y - 3 = 2z - 1$

   ② $P = (1, -1, 4)$ e $r : \frac{x-2}{4} = \frac{-y}{3} = \frac{1-z}{2}$

   ③ $P = (-2, 0, 1)$ e $r : (x, y, z) = (1, -2, 0) + \lambda(3, 2, 1)$

3. Obtenha os pontos da intersecção dos planos $\pi_1 : x + y = 2$ e $\pi_2 : x = y + z$ que distam $\sqrt{14/3}$ da reta $s : x = y = z + 1$.

4. Obtenha uma equação vetorial da reta r que dista 1 do ponto $P = (1, 2, 1)$, é concorrente com $s : (x, y, z) = (-1, 1, 1) + \lambda(0, -1, 2)$ e paralela a $t : 2x - z - 1 = y = 2$.

5. Calcule a distância do ponto P ao plano π:

   ① $P = (0, 0, -6)$ e $\pi : x - 2y - 2z - 6 = 0$

   ② $P = (1, 1, 15/6)$ e $\pi : 4x - 6y + 12z + 21 = 0$

   ③ $P = (9, 2, -2)$ e $\pi : (x, y, z) = (0, -5, 0) + \lambda(0, 5/12, 1) + \mu(1, 0, 0)$

6. Obtenha os pontos da reta $r : x = 2 - y = y + z$ que distam $\sqrt{6}$ do plano $\pi : x - 2y - z = 1$.

7. Calcule a distância do ponto de intersecção de r e s ao plano determinado por t_1 e t_2, onde $r : (x, y, z) = (1, 3, 4) + \lambda(1, 2, 3)$, $r : (x, y, z) = (1, 1, 0) + \lambda(-1, 0, 1)$, $t_1 : (x, y, z) = (0, 1, 0) + \lambda(0, 6, 1)$ e $t_2 : x = y - 6z + 8 = 2x - 3$.

8. Calcule a distância entre os planos π_1 e π_2:

   ① $\pi_1 : 2x - y + 2z + 9 = 0$ e $\pi_2 : 4x - 2y + 4z - 21 = 0$

   ② $\pi_1 : x + y + z = 0$ e $\pi_2 : x + y + z + 2 = 0$

   ③ $\pi_1 : x + y + z = 5/2$ e $\pi_2 : (x, y, z) = (2, 1, 2) + \lambda(-1, 0, 3) + \mu(1, 1, 0)$

   ④ $\pi_1 : x + y + z = 0$ e $\pi_2 : 2x + y + z + 2 = 0$

9. Calcule a distância entre a reta r e o plano π:

   ① $r: x - y + z = 0 = 2x + y - z - 3$ e $\pi: y - z = 4$

   ② $r: (x, y, z) = (1, 9, 4) + \lambda(3, 3, 3)$ e $\pi: (x, y, z) = (5, 7, 9) + \lambda(1, 0, 0) + \mu(0, 1, 0)$

   ③ $r: y = z = 0$ e $\pi: y + z = \sqrt{2}$

10. Obtenha uma equação geral do plano π que contém os pontos $P = (1, 1, -1)$, $Q = (2, 1, 1)$ e dista 1 da reta $r: (x, y, z) = (1, 0, 2) + \lambda(1, 0, 2)$.

11. Obtenha uma equação geral do plano π que dista $1/\sqrt{29}$ da reta $r: (x, y, z) = (1, 1, 3) + \lambda(0, 1, 2)$ e é paralelo ao segmento de extremidades $M = (2, 1, 4)$ e $N = (0, 1, 1)$.

✰ **Respostas**

(1) ① $(5, 6, 0)$; ② Não existem tais pontos; ③ Qualquer ponto de r
(2) ① $\sqrt{5}$; ② $\sqrt{270/29}$; ③ $3\sqrt{10/7}$; **(3)** $(2, 0, 2)$ e $(0, 2, -2)$;
(4) $r: (x, y, z) = (-1, 3, -3) + \lambda(1, 0, 2)$ ou $r: (x, y, z) = (-1, 17/9, -7/9) + \lambda(1, 0, 2)$;
(5) ① 2; ② $7/2$; ③ $94/13$; **(6)** $(-3, 5, -8)$ e $(9, -7, 16)$ **(7)** $6/\sqrt{41}$ **(8)** ① $13/2$; ② $2/\sqrt{3}$; ③ 0; ④ 0;
(9) ① $3/\sqrt{2}$; ② 0; ③ 1; **(10)** $y = 1$ ou $6x - 2y - 3z - 7 = 0$; **(11)** $3x + 4y - 2z - 2 = 0$ ou $3x + 4y - 2z = 0$;

Parte 7

✰ Cônicas

Para estes problemas, as coordenadas serão tomadas em relação a um sistema de coordenadas ortonormal $(O;\vec{i},\vec{j})$ no plano $\mathbb{E}^2$.

1. São dados, em cada caso, o parâmetro geométrico a e os focos de uma elipse. Obtenha uma equação algébrica em x, y satisfeita por todos os pontos da elipse:

   ① $a = 4$, $F_1 = (-3,2)$ e $F_2 = (-3,6)$

   ② $a = 3$, $F_1 = (-1,-1)$ e $F_2 = (1,1)$

2. Esboce as elipses abaixo e calcule a distância focal, a medida dos eixos e a excentricidade:

   ① $5x^2 + 9y^2 = 45$

   ② $16x^2 + 4y^2 = 4$

   ③ $3x^2 + 5y^2 = 15$

   ④ $4x^2 + 169y^2 = 676$

3. Obtenha a equação reduzida e a excentricidade da elipse cujo centro é a origem $(0,0)$ e cujos focos estão nos eixos coordenados nos seguintes casos:

   ① O eixo menor mede 6 e a distância focal é 8.

   ② O eixo maior mede 10 e a distância focal é 6.

   ③ Os focos são $(0,6)$ e $(0,-6)$ e o eixo maior mede 34.

   ④ Os focos são $(-1,0)$ e $(1,0)$ e um dos vértices é $(0,\sqrt{2})$.

4. Obtenha uma equação reduzida de uma elipse de centro na origem que tem focos em um dos eixos coordenados, excentricidade $\varepsilon = \sqrt{3}/2$ e contém o ponto $(\sqrt{3},1/2)$.

5. Esboce as hipérboles abaixo e calcule a distância focal, a medida dos eixos transversal e conjugado, a excentricidade e as assíntotas:

   ① $9x^2 - 4y^2 = 36$

   ② $x^2 - y^2 + 1 = 0$

   ③ $5x^2 - 9y^2 - 45 = 0$

   ④ $x^2 - 4y^2 = 2$

6. Obtenha a equação reduzida e a excentricidade da hipérbole cujo centro é a origem $(0,0)$ e cujos focos estão nos eixos coordenados nos seguintes casos:

① Os vértices são $(\pm 2, 0)$ e os focos são $(\pm 3, 0)$.

② Os vértices são $(\pm 15, 0)$ e as assíntotas são $y = \pm 4x/5$.

③ O ponto $(5, 9)$ pertence à hipérbole e as assíntotas têm equações $y = \pm x$.

④ Os focos estão no eixo y, as assíntotas têm equações $y = \pm 3x/2$ e o eixo conjugado mede 8.

7. Obtenha uma equação reduzida da hipérbole de centro na origem que tem focos em um dos eixos coordenados, excentricidade 2 e contém o ponto $(2, \sqrt{7})$.

8. Calcule o foco, o vértice e a diretriz das parábolas abaixo:

① $y^2 = 4x$

② $x^2 + 8y = 0$

③ $x^2 + 6y = 6$

④ $y = 2x^2 - 4x + 2$

9. Obtenha, em cada caso abaixo, uma equação reduzida da parábola de vértice $(0, 0)$:

① O foco é $(8, 0)$.

② A diretriz tem equação $y = 2$.

③ O ponto $(4, 7)$ pertence à diretriz e o eixo é Ox.

④ O ponto $(5, 10)$ pertence à parábola e o eixo é Ox.

10. Descreva a cônica que cada uma das equações abaixo determina:

① $4x^2 - y^2 + 8x - 2y - 1 = 0$

② $x^2 - 2x - 4y - 8 = 0$

③ $3x^2 + 2y^2 + 6x - 8y + 5 = 0$

④ $2x^2 + y^2 + 2y - 1 = 0$

⑤ $6x^2 - y^2 - 4y + 2 = 0$

⑥ $x^2 - y^2 - 2x + 2y - 3 = 0$

11. Obtenha a equação da parábola que tem como foco o ponto $P = (-4, -2)$ e como diretriz a reta $r : 2x + y = 3$.

☆ Quádricas

12. Identifique e esboce cada uma das seguintes quádricas de $\mathbb{E}^3$:

① $2x^2+y^2+z^2+4x-2z+1=0$

② $x^2-y^2-z^2+2z-5=0$

③ $z-3x^2-5y^2=0$

④ $x^2-y^2+z=0$

⑤ $2x^2+3y^2-z^2=0$

⑥ $x^2-3y^2+8z^2=1$

✰ Respostas

(1) ① $4x^2+3y^2+24x-24y+36=0$; ② $8x^2-2xy+8y^2-63=0$;
(2) ① $6, 2\sqrt{5}, 4, \varepsilon=1/3$; ② $2, 1, \sqrt{3}, \varepsilon=\sqrt{3}/2$;
③ $2\sqrt{5}, 2\sqrt{3}, 2\sqrt{2}, \varepsilon=\sqrt{2/5}$; ④ $26, 4, 2\sqrt{165}, \varepsilon=\sqrt{165}/13$;
(3) ① $x^2/25+y^2/9=1$, $\varepsilon=4/5$; ② $x^2/25+y^2/16=1$, $\varepsilon=3/5$;
③ $x^2/289+y^2/253=1$, $\varepsilon=6/17$; ④ $x^2/3+y^2/2=1$, $\varepsilon=1/\sqrt{3}$
(4) $x^2/4+y^2=1$ ou $x^2/(49/16)+y^2/(49/4)=1$ **(5)** ① $2\sqrt{13}, 4, 6, \varepsilon=\sqrt{13}/2, y=\pm(2/3)x$;
② $2\sqrt{2}, 2, 2\sqrt{2}, y=\pm x/\sqrt{2}$; ③ $2\sqrt{14}, 6, 2\sqrt{5}, \sqrt{14}/3, y=\pm 3x/\sqrt{5}$;
④ $\sqrt{5/2}, 2\sqrt{2}, \sqrt{2}, \sqrt{5}/2, y=\pm 2x$;
(6) ① $x^2/4-y^2/5=1, \varepsilon=3/2$; ② $x^2/225-y^2/144=1, \varepsilon=\sqrt{369}/15$;
③ $y^2/56-x^2/56=1, \varepsilon=\sqrt{2}$ ④ $y^2/36-x^2/16=1, \varepsilon=\sqrt{52}/6$
(7) $x^2/(5/3)-y^2/5=1$ ou $y^2/(17/3)-x^2/17=1$ **(8)** ① $(1,0), (0,0), x=-1$; ② $(-2,0), (0,0), y=2$; ③ $(0,1/2), (0,1), y=5/2$; ④ $(1,1/8), (1,0), y=-1/8$;
(9) ① $y^2=32x$; ② $y=-8x^2$; ③ $x=-16y^2$; ④ $y^2=20x$;
(10) ① Hipérbole de centro $(-1,-1)$, eixos transversal e conjugado paralelos aos eixos coordenados, medindo 2 e 4, respectivamente, e vértices $(0,0)$, $(-2,0)$; ② Parábola de vértice $(2,-3)$, diretriz $y=-4$, foco $(2,-2)$;
③ Elipse de centro $(-1,2)$ e eixos paralelos aos eixos coordenados medindo $2\sqrt{2}$ e $\sqrt{3}$;
④ Conjunto vazio; ⑤ Hipérbole de centro $(0,-2)$, eixos transversal e conjugado paralelos aos eixos coordenados, medindo $2\sqrt{6}$ e 2, respectivamente, e vértices $(0, 2\pm\sqrt{6})$;
⑥ Reunião das retas $x-y+1=0$ e $x+y-3=0$; **(11)** $x^2-4xy+4y^2+52x+26y+91=0$
(12) ① Elipsóide de centro $(-1,0,1)$ e eixos paralelos aos eixos coordenados medindo $1, \sqrt{2}, \sqrt{2}$;
② Hiperbolóide de 2 folhas com eixos paralelos aos eixos coordenados medindo $1, 1, 1$;
③ Parabolóide elíptico de vértice na origem;
④ Parabolóide hiperbólico;
⑤ Superfície cônica com vértice na origem e eixo Oz;
⑥ Hiperbolóide de uma folha