UFPR - Universidade Federal do Paraná
Departamento de Matemática
CM045 - Geometria Analítica (Engenharia Ambiental)
Prof. José Carlos Eidam

1	
2	
Nota	

SEGUNDA PROVA - 19/05/2011
GABARITO

Em toda a prova, as coordenadas são tomadas em relação à um sistema ortonormal positivo de coordenadas $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ fixado.

Questão 1 Considere os vetores $\vec{u} = (1, -1, 2)$, $\vec{v} = (2, -2, 3)$ e o ponto $P = (-1, 5, 3)$.

(a) **(1,5 ponto)** Calcule o valor de α que torna o vetor $\vec{w}_1 = (2\alpha + 1, \alpha^2, 2011)$ ortogonal a $\vec{u} \wedge \vec{v}$.

(b) **(2 pontos)** Ache o vetor $\vec{w}_2$ caracterizado pelas seguintes propriedades:

① $|\vec{w}_2| = \sqrt{5}$;

② $\vec{w}_2 \wedge \vec{u} = 2\vec{i} + 4\vec{j} + \vec{k}$;

③ O ângulo entre $\vec{w}_2$ e $\vec{w}_3 = (1, 1, 1)$ é agudo.

(c) **(1,5 ponto)** Sejam $\vec{w}_4 = (3\beta + 1, 5\beta + 2, 3 - \beta)$ e $\vec{w}_5 = \text{proj}_{\vec{u}}\vec{w}_4$. Encontre o valor de β para o qual é satisfeita a igualdade $\vec{w}_5 \cdot (6\vec{i} + 2\vec{j} + 4\vec{k}) = 14$.

(d) **(1,5 ponto)** Seja r a reta que passa pelo ponto P e tem a direção do vetor $\vec{u} \wedge \vec{v}$ e considere a reta s que passa pelo ponto $(3, 5, -4)$ e é paralela a r. Determine o valor de γ para o qual o ponto $Q = (2 + \gamma, 1 - 2\gamma, -4)$ pertence a s.

Solução.

(a) Temos que $\vec{u} \wedge \vec{v} = (1, 1, 0)$, portanto, $\vec{w} \perp (\vec{u} \wedge \vec{v})$ implica que $\alpha^2 + 2\alpha + 1 = 0$, ou seja, $\alpha = -1$.

(b) Pondo $\vec{w}_2 = (x, y, z)$, temos que $\vec{w}_2 \wedge \vec{u} = (2y + z, z - 2x, -x - y)$, logo, $\vec{w}_2 = (x, -x - 1, 2x + 4)$. Impondo a segunda condição, vemos que $x = -1$ ou $x = -2$, portanto, $\vec{w}_2 = (-1, 0, 2)$ ou $\vec{w}_2 = (-2, 1, 0)$. A terceira condição é satisfeita somente no primeiro caso, assim, $\vec{w}_2 = (-1, 0, 2)$.

(c) Temos que $\vec{w}_5 = \frac{5-4\beta}{6}(1, -1, 2)$. Como $\vec{w}_5 \cdot (6, 2, 4) = 14$, temos $\frac{5-4\beta}{6}(1, -1, 2) \cdot (6, 2, 4) = 14$, logo, $\beta = -1/2$.

(d) A reta s tem equação vetorial $(x, y, z) = (3, 5, -4) + \lambda(1, 1, 0)$, logo $Q \in s$ se e só se existe λ tal que $(2 + \gamma, 1 - 2\gamma, -4) = (3, 5, -4) + \lambda(1, 1, 0)$. Fazendo as contas, vemos que $\lambda = -2$ e $\gamma = -1$.

∎

Questão 2 Classifique as afirmações abaixo em verdadeiras ou falsas, justificando a sua resposta (respostas sem justificativa serão desconsideradas):

(a) **(1 ponto)** Se $\vec{u} = (1, 1, -1)$ e $\vec{w}$ é ortogonal a $\vec{u}$ e a $\vec{i} + \vec{k}$ então $\vec{w}$ é paralelo a $\vec{v} = (-1, 2, 1)$.

(b) **(1 ponto)** Dados vetores $\vec{u}, \vec{v}$ quaisquer, existem $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tais que $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{w} = \alpha u + \beta \vec{v}$.

(c) **(1,5 ponto)** Se $\vec{u}$ é solução do sistema de equações $\begin{cases} \vec{u} \wedge (\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}) &= 2\vec{i} - 2\vec{k} \\ \vec{u} \cdot (2\vec{i} - 4\vec{j} - \vec{k}) &= 1 \end{cases}$ então $\vec{u}$ é paralelo a $(-30, -10, -30)$.

Solução.

(a) Temos que $\vec{u} \wedge (\vec{i} + \vec{k}) = (1, -2, -1)$. Como qualquer vetor ortogonal a $\vec{u}$ e a $\vec{i} + \vec{k}$ deve ser paralelo a $\vec{u} \wedge (\vec{i} + \vec{k})$ e os vetores $(1, -2, -1)$ e $(-1, 2, 1)$ são paralelos, a afirmação é **VERDADEIRA**.

(b) A afirmação é evidentemente verdadeira se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ forem LI, pois, neste caso, o membro esquerdo é nulo e o membro direito pode ser tornado nulo tomando $\alpha = \beta = 0$. Assumindo que $\vec{u}, \vec{v}$ são LI, temos que $\vec{u} \wedge \vec{v} \neq 0$ e, por definição do produto vetorial, $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{w}$ é ortogonal a $\vec{u} \wedge \vec{v}$. Em particular, $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{w}$ deve ser combinação linear de $\vec{u}$ e $\vec{w}$. Portanto, a afirmação é **VERDADEIRA**.

(c) Pondo $\vec{u} = (x, y, z)$, temos que $\vec{u} \wedge (\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}) = (y - z, z - x, x - y)$. Logo, $\vec{u} = (x, x + 2, x)$. Como $\vec{u} \cdot (2, -4, -1) = 1$, concluímos que $x = -3$ e, portanto, $\vec{u} = (-3, -1, -3)$, que é paralelo a $(-30, -10, -30)$. Assim, a afirmação é **VERDADEIRA**.

∎