UFPR - Universidade Federal do Paraná
Departamento de Matemática
CM045 - Geometria Analítica (Engenharia Ambiental)
Prof. José Carlos Eidam

1	
2	
Nota	

GABARITO DA TERCEIRA PROVA - 16/06/2011

Na questão 1, as coordenadas são tomadas em relação à um sistema ortonormal positivo de coordenadas $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ fixado em $\mathbb{E}^3$.

Questão 1 Seja a um número real fixado e considere o ponto $P = (-1, 3, 2)$ e as retas

$$r : \begin{cases} x &= 3y + 1 \\ z - y &= 1 \end{cases}$$

e $s : (x, y, z) = (0, 4, 1) + \lambda(2, a, 1)$.

(a) **(1,5 ponto)** Determine o valor de a para o qual r e s são concorrentes e calcule o seu ponto de intersecção.

Solução. Os pontos de s tem a forma $(-\lambda, -1 + a\lambda, 1 + \lambda)$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Para que um ponto desta forma satisfaça as equações que definem r, devemos ter $a = 5$ e $\lambda = -1$, logo, o ponto de intersecção de r e s é $(-2, -1, 0)$. ∎

(b) **(1, 5 ponto)** Determine uma equação geral para o plano que contém r e o ponto P.

Solução. O ponto $Q = (1, 0, 1)$ pertence a r. O vetor $\vec{v} = (3, 1, 1)$ que determina a direção de r e o vetor $\overrightarrow{PQ} = (2, -3, -1)$ são paralelos ao plano π procurado. Como $\vec{v} \wedge \overrightarrow{PQ} = (2, 5, -11)$ e o ponto Q pertence a π, segue que $\pi : 2x + 5y - 11z + 9 = 0$.

∎

(c) **(1,5 ponto)** Determine para que valores de β a distância de P ao plano $\pi : 2x+\beta y-6z-2 = 0$ é 1.

Solução. Usando a fórmula da distância entre um ponto e um plano, temos

$$1 = \frac{|2(-1) + 3\beta - 6(2) - 2|}{\sqrt{2^2 + \beta^2 + 6^2}}.$$

Elevando ambos os membros ao quadrado e fazendo as contas, chegamos à equação $\beta^2 - 12\beta + 27 = 0$ que nos dá $\beta = 9$ e $\beta = 3$ como soluções do problema. ∎

(d) **(1,5 ponto)** Determine uma equação geral para o plano que contém o ponto P e é paralelo ao plano π_1 de equações

$$\begin{cases} x &= 2011 + 4\lambda - \mu \\ y &= 2012 + \lambda + \mu \\ z &= 2013 - \lambda - 3\mu \end{cases}.$$

Solução. Os vetores $\vec{u} = (4, 1, -1)$ e $\vec{v} = (-5, 1, -3)$ são paralelos a π_1 e, portanto, são paralelos ao plano π_3 procurado. Como $\vec{u} \wedge \vec{v} = (-2, 13, 5)$ e $P = (-1, 3, 2)$ pertencem à π_3, concluímos que $\pi_3 : -2x + 13y + 5z - 51 = 0$. ∎

(e) **(2 pontos)** Determine uma equação geral para o plano que contém a reta r e é perpendicular ao plano

$$\pi_2 : (x, y, z) = (0, 2, 0) + \lambda(0, 6, -2) + \mu(1, -3, 1)\,.$$

Solução. Seja $\overrightarrow{n} = (a, b, c)$ um vetor normal ao plano π_4 procurado. Como $r \subset \pi_4$, devemos ter que $(a, b, c) \cdot (3, 1, 1) = 0$, ou seja, $3a + b + c = 0$. Como $(0, 6, -2) \wedge (1, -3, 1) = (0, -2, -6)$ e π_4 é ortogonal a π_2, devemos ter que $(a, b, c) \cdot (0, -2, -6) = 0$, isto é, $b + 3c = 0$. Resolvendo o sistema para a, b, c, concluímos que $\overrightarrow{n} = a(1, -\frac{9}{2}, \frac{3}{2})$, para qualquer $a \in \mathbb{R}$. Escolhendo $a = 2$, temos que $\overrightarrow{n} = (2, -9, 3)$ é normal a π_4 e π_4 contém o ponto $(1, 0, 1) \in r$, portanto, $\pi_4 : 2x - 9y + 3z - 5 = 0$. ∎

Na próxima questão, as coordenadas (x, y) referem-se à um sistema de coordenadas ortonormal positivo em $\mathbb{E}^2$.

Questão 2 Determine as equações reduzidas das cônicas descritas abaixo:

(a) **(1 ponto)** Hipérbole de centro na origem, focos sobre o eixo x, assíntotas $y = \pm 3x/\sqrt{7}$ e distância focal 2.

Solução. A equação da hipérbole procurada deve ser da forma $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$; a forma das assíntotas implica que $b/a = 3/\sqrt{7}$. Como a distância focal é 2, temos $c = 1$. Como $c^2 = a^2 + b^2$, temos $a = \sqrt{7}/4$ e $b = 3/4$. Assim, a equação reduzida da hipérbole procurada é

$$\frac{x^2}{7} - \frac{y^2}{9} = 1\,.$$

∎

(b) **(1 ponto)** Elipse de excentricidade $1/2$ com eixo menor medindo 10, centro no ponto $(2, 1)$ e focos sobre a reta $y = 1$.

Solução. Como a elipse tem excentricidade $1/2$, temos que $a = 2c$; como $c^2 = a^2 - b^2$ e $b = 5$, segue que $a = 10/\sqrt{3}$. Como os focos estão sobre a reta $y = 1$, aí também está o eixo maior, portanto, a equação reduzida da elipse é $\frac{(x-2)^2}{100/3} + \frac{(y-1)^2}{25} = 1$, ou,

$$\frac{(x-2)^2}{4/3} + (y-1)^2 = 1\,.$$

∎

(c) **(1 ponto)** Parábola de vértice $(-1, 1)$, foco sobre a reta $y = 1$ e reta diretriz $x = -2$.

Solução. Pelos dados do problema, a equação da parábola deve ser da forma $x + 1 = 4p(y - 1)^2$. O parâmetro p deve ser a distância entre o vértice e a reta diretriz, portanto, $p = 1$, logo, a parábola procurada tem equação

$$x + 1 = 4(y - 1)^2\,.$$

∎