UFPR - Universidade Federal do Paraná
Departamento de Matemática
CM045 - Geometria Analítica (Engenharia Ambiental)
Prof. José Carlos Eidam

GABARITO DA PROVA SUBSTITUTIVA - 21/06/2011

Em toda a prova, as coordenadas são tomadas em relação a um sistema ortonormal positivo de coordenadas $\Sigma = (O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ em $\mathbb{E}^3$.

Questão 1 Considere as retas $r_1 : \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 - 3\lambda \\ z = -1 + \lambda \end{cases}$ e $r_2 : x = \frac{y-1}{2} = 1 - z$.

(a) **(1 ponto)** Determine se r_1 e r_2 são coincidentes, paralelas, reversas ou concorrentes.

Solução. Substituindo os valores de x, y, z para um ponto de r, obtemos o sistema impossível $2 = \frac{(1-3\lambda)-1}{2} = 1 - (-1 + \lambda)$. Como $(0, -3, 1)$ e $(1, 2, -1)$ são vetores diretores não-paralelos para r_1, r_2, respectivamente, segue que r_1 e r_2 são reversas. ∎

(b) **(2 pontos)** Encontre uma equação geral para o plano π_1 que é paralelo a r_1 e contém a reta $r_3 : x - 1 = \frac{y+1}{2} = z - 1$.

Solução. Como π_1 é paralelo a r_1, segue que o vetor $\vec{v}_1 = (0, -3, 1)$ é paralelo a π_1; como π_1 contém r_2, o vetor $\vec{v}_2 = (1, 2, -1)$ também é paralelo a π_1. Logo, $\vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2 = (1, 1, 3)$ é normal a π_1. Como $(1, -1, 1)$ pertence a r_2, uma equação geral para π_1 é $1 \cdot (x-1) + 1 \cdot (y+1) + 3 \cdot (z-1) = 0$, ou seja, $\pi_1 : x + y + 3z - 3 = 0$. ∎

(c) **(2 pontos)** Encontre uma equação geral para o plano π_2 que é ortogonal a r_2 e contém o ponto de intersecção de r_1 e $r_4 : \begin{cases} 3x - y = 2 \\ 2x + z = 2 \end{cases}$.

Solução. O ponto de intersecção de r_1 e r_4 é $(2, 4, -2)$. Como π_2 é ortogonal a r_2, o vetor $(1, 2, -1)$ é ortogonal a π_2, logo, uma equação geral para π_2 é $1 \cdot (x-2) + 2 \cdot (y-4) - 1 \cdot (z+2) = 0$, ou seja, $\pi_2 : x + 2y - z - 12 = 0$. ∎

Questão 2 Considere os pontos $A = (1, 0, 1)$, $B = (2, -1, 3)$ e a reta $r : \begin{cases} x + y + 3z = 3 \\ 2x + 2y - 7z + 7 = 0 \end{cases}$.

(a) **(1,5 ponto)** Determine a distância de A a r.

Solução. A reta r tem equação vetorial $(x, y, z) = (0, 0, 1) + \lambda(1, -1, 0)$. Como $P = (0, 0, 1)$ pertence a r e $\vec{v} = (1, -1, 0)$ é um vetor diretor para r, concluímos que a distância entre A e r é

$$\frac{|\overrightarrow{AP} \wedge \vec{v}|}{|\vec{v}|} = \frac{|(-1, 0, 0) \wedge (1, -1, 0)|}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

∎

(b) **(2 pontos)** Encontre um ponto C sobre r de forma que o triângulo ABC tenha os lados AC e BC congruentes.

Solução. Os pontos C de r são da forma $C = (\lambda, -\lambda, 1)$, assim, $|\overrightarrow{AC}| = |(\lambda - 1, -\lambda, 0)| = 2\lambda^2 - 2\lambda + 1$ e $|\overrightarrow{BC}| = |(\lambda - 2, -\lambda + 1, -2)| = 2\lambda^2 - 6\lambda + 9$, logo, para que $|\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{BC}|$, devemos ter $\lambda = 2$, e portanto, $C = (2, -2, 1)$. ∎

Questão 3 **(1,5 ponto)** Sejam a, b números reais *positivos* e considere os vetores $\vec{u}_1 = (b, a, -b)$, $\vec{u}_2 = (2a, -b, a)$ e $\vec{u}_3 = (a, b, 2a)$. Determine os valores de a e b que tornam $F = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ uma base ortonormal. Decida se F é uma base positiva ou negativa.

Solução. Para que a base F seja ortonormal, devemos ter que $|\vec{u}_1| = |\vec{u}_2| = |\vec{u}_3| = 1$, logo $5a^2 + b^2 = 1$ e $a^2 + 2b^2 = 1$. Resolvendo o sistema, obtemos $a = 1/3$ e $b = 2/3$. Como o determinante da matriz cujas colunas são as coordenadas dos vetores $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$ é -1, a base F é negativa. ∎