# Exercícios de Cálculo II - CM042

**Prof. José Carlos Corrêa Eidam**
**DMAT/UFPR**

Disponível no sítio `people.ufpr.br/ ~eidam/index.htm`

**2o. semestre de 2011**

## Parte 1

### ✰ Curvas

1. Desenhe as imagens das seguintes curvas:

   (a) $\gamma(t) = (1, t)$

   (b) $\gamma(t) = (\cos^2 t, \operatorname{sen} t)$ , $0 \leq t \leq 2\pi$

   (c) $\gamma(t) = (\operatorname{sen} t, \operatorname{sen}^2 t)$

   (d) $\gamma(t) = (2 + \cos t, 3 + 4\operatorname{sen} t)$

   (e) $\gamma(t) = (\frac{1}{2}, 1 - t)$

   (f) $\gamma(t) = (e^t \cos t, e^t \operatorname{sen} t)$ , $t \geq 0$

   (g) $\gamma(t) = (\sec t, \tan t)$ , $-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$

   (h) $\gamma(t) = (\sqrt{2}\cos t, 2\operatorname{sen} t)$

   (i) $\gamma(t) = (\ln t, \sqrt{t})$, $t \geq 1$

   (j) $\gamma(t) = (\cosh t, \sinh t)$, $t \in \mathbb{R}$

   (k) $\gamma(t) = (1 + \cos t, 2\cos t - 1)$, $0 \leq t \leq 2\pi$

   (l) $\gamma(t) = (1 - t^2, 2t^3 + 1)$, $t \in \mathbb{R}$

   (m) $\gamma(t) = (t(t^2 - 3), 3(t^2 - 3))$

   (n) $\gamma(t) = (t^3 - 3t^2, t^3 - 3t)$

   (o) $\gamma(t) = (t^4 - 2t^3 - 2t^2, t^3 - 3t)$

   (p) $\gamma(t) = (2t^3 - 3t^2, t^3 - 12t)$

2. Associe as equações paramétricas aos gráficos I a VI. Justifique sua escolha.

   (a) $x = t^3 - 2t, \;\; y = t^2 - t$

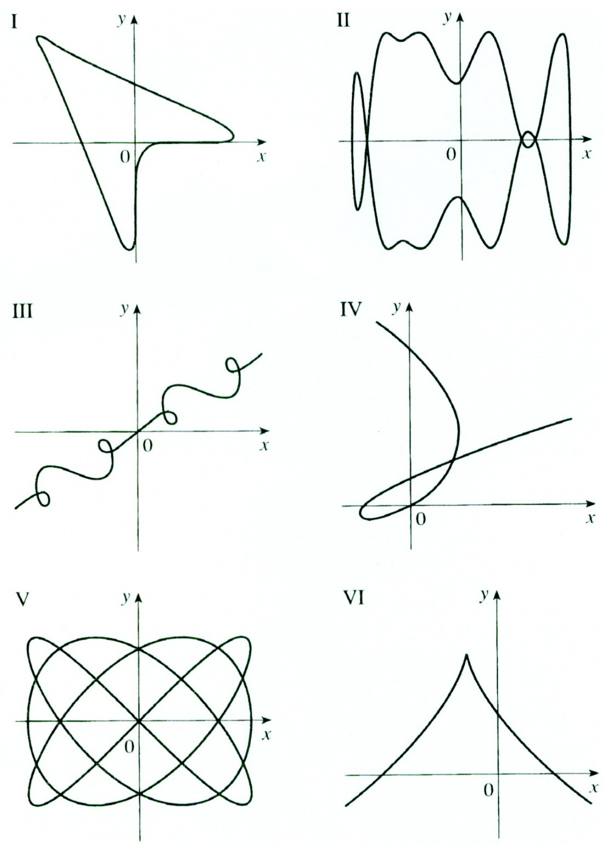
   (b) $x = t^3 - 1, \;\; y = 2 - t^2$

   (c) $x = \operatorname{sen}(3t), \;\; y = \operatorname{sen}(4t)$

   (d) $x = t + \operatorname{sen}(2t), \;\; y = t + \operatorname{sen}(3t)$

   (e) $x = \operatorname{sen}(t + \operatorname{sen} t), \;\; y = \cos(t + \cos t)$

   (f) $x = \cos t, \;\; y = \operatorname{sen}(t + \operatorname{sen}(5t))$

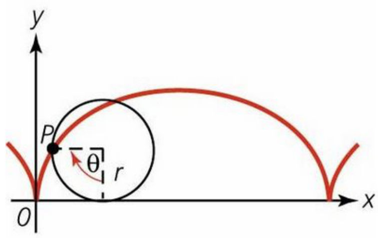



3. Considere $f(x) = \left(\sqrt[3]{x}\right)^2$. A função $f$ é derivável em $x = 0$? Determine uma curva $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, derivável e cuja imagem seja igual ao gráfico de $f$.

4. Mostre que a curva $\gamma(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t \cos t)$ admite duas retas tangentes em (0,0) e ache suas equações.

5. Sejam $I$ um intervalo aberto de $\mathbb{R}$ e $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$ uma curva diferenciável. Mostre que, se existe $C \in \mathbb{R}$ tal que $|\gamma(t)| = C$, para todo $t \in I$, então $\gamma(t)$ é ortogonal a $\gamma'(t)$, para todo $t \in I$. Vale a recíproca? Interprete geometricamente.

6. Uma circunferência de raio $r$ rola sem escorregar ao longo do eixo $Ox$. Encontre equações paramétricas para a curva descrita por um ponto da circunferência que se encontra inicialmente no origem (Esta curva é chamada de ciclóide).




7. Calcule o comprimento da curva $\gamma$:

   ① $\gamma_1(t) = (2t^2 - 1, 4t^2 + 3)$ , $t \in [-4, 4]$;

   ② $\gamma_2(t) = (\cos^2 t, \operatorname{sen}^2 t)$ , $t \in [0, \pi]$;

   ③ $\gamma_3(t) = (\cos t + t \operatorname{sen} t, \operatorname{sen} t - t \cos t)$ , $t \in [0, \pi]$.

8. Encontre o comprimento de um arco da ciclóide $x = r(\theta - \operatorname{sen}\theta)$, $y = r(1 - \cos\theta)$ (Dica: Use a identidade $1 - \cos\theta = 2\operatorname{sen}^2(\theta/2)$).

9. Mostre que o comprimento da elipse $x = a\cos\theta$, $y = b\operatorname{sen}\theta$, $a > b > 0$, $0 \le \theta \le 2\pi$ é

$$4a \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - \varepsilon^2 \operatorname{sen}^2\theta}\, d\theta,$$

   onde $\varepsilon = c/a$ é a excentricidade da elipse e $c = \sqrt{a^2 - b^2}$.

10. Esboce a astróide $x = a\cos^3\theta$, $y = b\operatorname{sen}^3\theta$, $0 \le \theta \le 2\pi$, $a > 0$, e calcule seu comprimento.

11. Encontre pelo menos três conjuntos distintos de equações paramétricas para representar a curva $y = x^3$, $x \in \mathbb{R}$.

12. Encontre as equações das retas tangentes à curva paramétrica $x(t) = 3t^2 + 1$, $y(t) = 2t^3 + 1$ que passam pelo ponto $(4, 3)$.

13. Seja $\gamma : (a, b) \to \mathbb{R}^2$ uma curva regular parametrizada pelo comprimento de arco $s$. O *vetor normal* a $\gamma$ no ponto $\gamma(t)$ é definido por $n(s) = (-y'(s), x'(s))$, $a < s < b$.

   ① Mostre que os vetores $\gamma'(s)$ e $\gamma''(s) = (x''(s), y''(s))$ são perpendiculares para qualquer $s \in (a, b)$.

   ② Mostre que existe uma função $\kappa : (a, b) \to \mathbb{R}$ diferenciável tal que $\gamma''(s) = \kappa(s)n(s)$, para $a < s < b$. O valor $\kappa(s)$ é chamado *curvatura* de $\gamma$ em $\gamma(s)$. Mostre que $\kappa = x'y'' - x''y'$, onde $'$ denota a derivada em relação a $s$.

③ Considere o ângulo $\theta(s)$ formado pelo eixo $x$ e pela reta tangente a $\gamma$ em $\gamma(s)$, i.e., $\tan\theta(s) = y'(s)/x'(s)$. Mostre que $\kappa(s) = \theta'(s)$ para cada $s \in (a,b)$ e interprete geometricamente o que significa o sinal da curvatura de $\gamma$.

④ Seja $\alpha : (a,b) \to \mathbb{R}^2$ uma curva regular qualquer com $\alpha(t) = (p(t), q(t))$, $a < t < b$, $s$ o parâmetro de comprimento de arco e $\beta(s) = \alpha(t(s))$, a reparametrização de $\alpha$ por comprimento de arco. Como $\beta$ é parametrizada por comprimento de arco, a curvatura $\kappa$ de $\beta$ é bem-definida. Mostre que

$$\kappa = \frac{p'q'' - p''q'}{(p'^2 + q'^2)^{3/2}}$$

O valor desta função em $s = s(t)$ é chamado de *curvatura* de $\alpha$ em $\alpha(t)$.

⑤ Mantendo a notação do ítem anterior, admitindo que $\alpha$ seja o gráfico de uma função $y = f(t)$, mostre que a curvatura é dada por $\kappa = \frac{f''}{(1+(f')^2)^{3/2}}$.

⑥ Calcule a curvatura da *espiral logarítmica* $\alpha(t) = (e^t \cos t, e^t \operatorname{sen} t)$, $t \in \mathbb{R}$.

14. Esboce as seguintes curvas dadas em coordenadas polares:

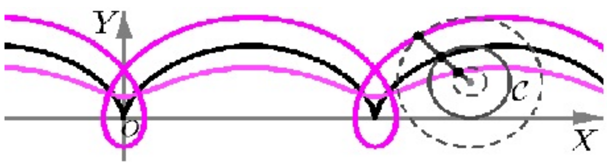
① $r = 1$ ② $\theta = \pi/3$ ③ $r = \cos\theta$ ④ $r = \cos 2\theta$
⑤ $r = 1 + \operatorname{sen}\theta$ ⑥ $r = \cos 3\theta$ ⑦ $r = 2|\operatorname{sen}\theta|$ ⑧ $r = \frac{1}{\cos\theta}$
⑨ $r = \theta$ ⑩ $r^3 - 4r^2 + 5r - 2 = 0$

15. Encontre equações polares e faça um esboço das as curvas dadas abaixo em equações cartesianas:

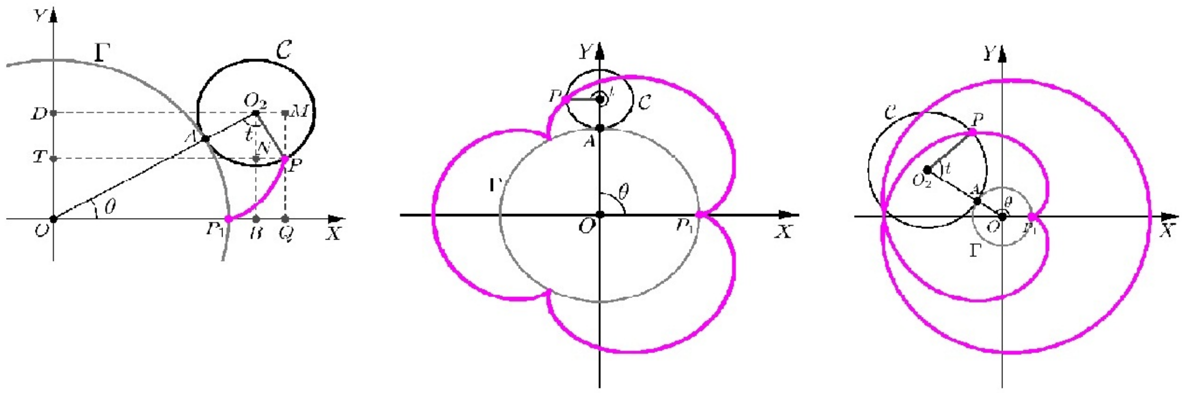
① $x^2 + y^2 = a^2$, $a > 0$ ② $2x + 3y = 1$ ③ $x^2 - y^2 = 1$ ④ $x^2 + 2y^2 = 1$
⑤ $x^2 + y^2 = e^{2y/x}$ ⑥ $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$ ⑦ $y - x\tan((x^2 + y^2)^{-1/2}) = 0$ ⑧ $(x^2 + y^2)^3 = 4x^2y^2$

### ✰ Curvas notáveis

16. Consideremos a circunferência $C$ de centro $(0, r)$ e raio $r > 0$, a semi-reta $s = \{(x, y) : y \geq 0\}$ e um ponto $P = (0, R)$, $R > 0$, nessa semi-reta. Uma *trocóide* é o lugar geométrico descrito pelo ponto $P$ quando $C$ rola sobre o eixo $x$ sem deslizar. Note que a ciclóide é um caso particular de trocóide quando $P \in C$. Quando $P$ é exterior a $C$, a trocóide é chamada de *ciclóide longa*; quando $P$ é interior a $C$, a trocóide é chamada de *ciclóide curta*. Encontre equações paramétricas que descrevam a trocóide.




17. Consideremos dois círculos $\Gamma$ e $C$ de raios $R > 0$ e $r > 0$, respectivamente, os quais se tocam exteriormente apenas em um ponto $P$. Admitamos também que $\Gamma$ seja centrado na origem e $C$ tenha centro no ponto $(R + r, 0)$. Denominamos *epiciclóide* o lugar geométrico descrito pelo ponto $P$ quando $C$ rola (sem deslizar) sobre $\Gamma$. A primeira figura abaixo ilustra este processo; as duas figuras seguintes ilustram os casos $r < R$ e $r > R$, respectivamente.



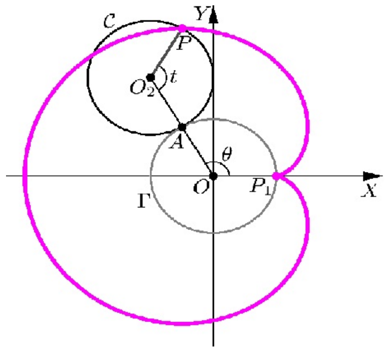

① Sejam $(x, y)$ as coordenadas do ponto $P$ na primeira figura. Mostre que $x = OB - QB$, $y = OD - DT$, $OB = (R+r)\cos\theta$ e $OD = (R+r)\operatorname{sen}\theta$.

② Mostre que $QB = r\cos(\theta + t)$ e $DT = r\operatorname{sen}(\theta + t)$.

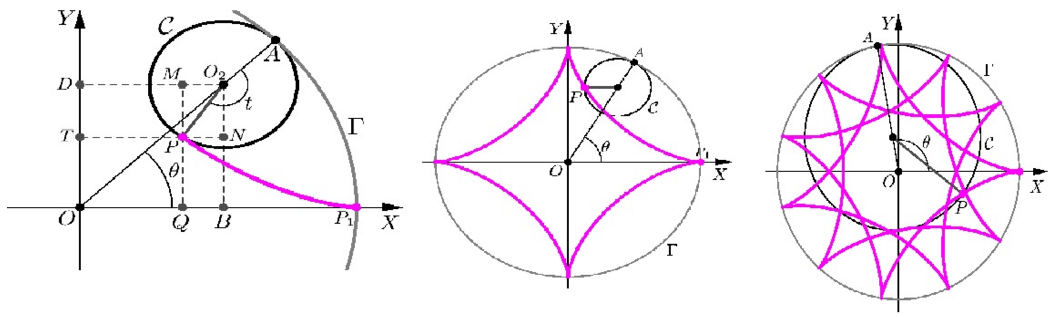
③ Mostre que $t = R\theta / r$ e conclua que as equações paramétricas da epiciclóide são

$$x = (R+r)\cos\theta - r\cos\left(\left(\frac{R+r}{r}\right)\theta\right) \text{ e } y = (R+r)\operatorname{sen}\theta - r\operatorname{sen}\left(\left(\frac{R+r}{r}\right)\theta\right).$$

Quando $R = r$, a curva obtida é chamada de *cardióide*.




18. Consideremos dois círculos $\Gamma$ e $C$ de raios $R > 0$ e $r > 0$, respectivamente, os quais se tocam *interiormente* apenas em um ponto $P$. Admitamos também que $\Gamma$ seja centrado na origem e $C$ tenha centro no ponto $(R+r, 0)$. Denominamos *hipociclóide* o lugar geométrico descrito pelo ponto $P$ quando $C$ rola (sem deslizar) sobre $\Gamma$. A primeira figura abaixo ilustra este processo; as duas figuras seguintes ilustram hipociclóides.



Usando raciocínios semelhantes àqueles utilizados no problema anterior, mostre que a hipociclóide tem equações paramétricas

$$x = (R-r)\cos\theta + r\cos\left(\left(\frac{R-r}{r}\right)\theta\right) \text{ e } y = (R-r)\operatorname{sen}\theta - r\operatorname{sen}\left(\left(\frac{R-r}{r}\right)\theta\right).$$

A hipociclóide obtida com $r = R/4$ é chamada de *astróide*.

19. O *fólium de Descartes* é a curva $\gamma$ descrita pelas equações paramétricas $x(t) = \frac{3at}{1+t^3}$ e $y(t) = \frac{3at^2}{1+t^3}$, com $t \neq -1$, onde $a > 0$ é fixado.

   ① Mostre que $\gamma$ satisfaz a equação cartesiana $x^3 + y^3 = 3axy$. Em particular, $\gamma$ é simétrica em relação à reta $y = x$.

   ② Mostre que a reta $x + y + a = 0$ é uma assíntota de $\gamma$.

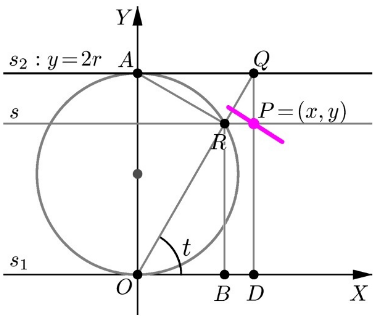
   ③ Faça um esboço de $\gamma$ .

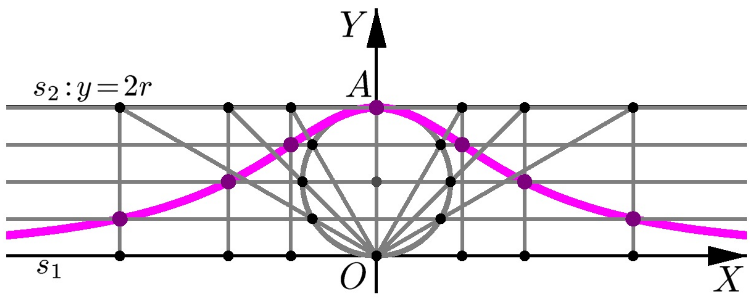
20. A *lemniscata de Bernoulli* é a curva $\gamma$ descrita pelas equações paramétricas $x(t) = \frac{t}{1+t^4}$ e $y(t) = \frac{t^3}{1+t^4}$, $t \in \mathbb{R}$.

   ① Mostre que $\gamma$ satisfaz a equação cartesiana $(x^2 + y^2)^2 = xy$. Em particular, $\gamma$ é simétrica em relação à reta $y = x$.

   ② Faça um esboço de $\gamma$ .

21. Seja $C$ um círculo de raio $r > 0$ tangente ao eixo $x$ e à reta $y = 2r$, onde $r > 0$ é fixado, conforme mostrado na primeira figura abaixo. Da origem, traçamos uma semi-reta em direção à reta $s_2$ e denotemos por $R$ e $Q$ os pontos de intersecção desta semi-reta com $C$ e $s_2$, respectivamente. O segmento $QD$ é perpendicular a $s_1$ e a reta $s$ é paralela a $s_1$. Consideremos também a reta $s$ paralela ao eixo $x$ passando por $R$ e $P$ o ponto de interseção da reta $s$ com o segmento $QD$. Os pontos $P = (x, y)$ obtidos traçando todas as semi-retas que partem de $O$ e intersectam $C$, descrevem a curva denominada *bruxa de Agnesi*, descrita na segunda figura abaixo.



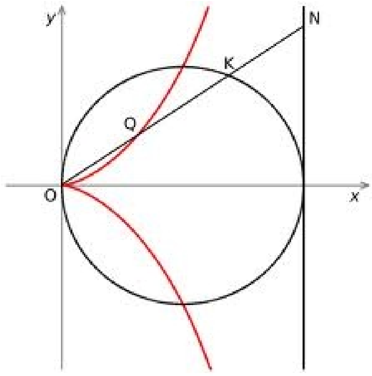




   ① Mostre que $x = OQ\cos t$ e $y = OR\operatorname{sen} t$.

   ② Mostre que $OQ = 2r/\operatorname{sen} t$ e $OR = 2r\operatorname{sen} t$.

   ③ Obtenha equações paramétricas para a bruxa de Agnesi.

22. Seja $C$ o círculo de centro $(r, 0)$ e raio $r > 0$ e considere a reta $x = 2r$, conforme mostra a figura abaixo. Traçando uma semi-reta $s$ qualquer partindo da origem, sejam $K$ e $N$ os seus pontos de intersecção com $C$ e $s$, respectivamente. O ponto $Q$ sobre $s$ tem a propriedade que $OQ = KN$. Os pontos $P = (x, y)$ obtidos quando traçamos todas as semi-retas que partem da origem e intersectam $s$ formam uma curva $\gamma$ chamada de *cissóide de Diocles*. O parâmetro que usaremos para parametrizar esta curva é o ângulo $\theta$ entre o segmento $ON$ e o eixo $x$.



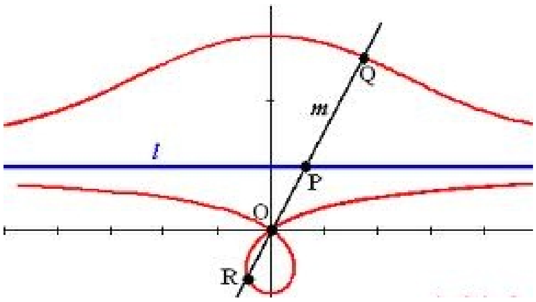

① Mostre que $OK = 2r\cos\theta$ e $ON = \frac{2r}{\cos\theta}$. Conclua que $KN = 2r\frac{\text{sen}^2\theta}{\cos\theta}$.

② Obtenha equações paramétricas para $\gamma$.

③ Mostre que a equação de $\gamma$ em coordenadas polares é $r = 2r\text{sen}\,\theta\tan\theta$.

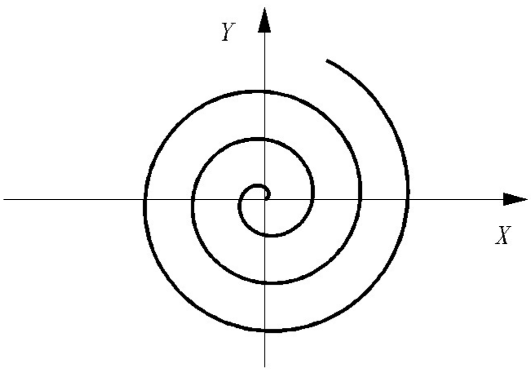
④ Mostre que $\gamma$ tem equação cartesiana $x^3 + (x-2r)y^2 = 0$.

23. Sejam $a, b > 0$ $r$ a reta horizontal $y = a$. Tracemos uma reta $s$ partindo da origem em direção à $r$ e chamemos de $P$ o ponto de intersecção de $s$ e $r$. Os pontos $Q$ e $R$ tais que as medidas dos segmentos $PQ$ e $PR$ são constantes iguais a $b$ formam uma curva chamada de *conchóide de Nicomedes.*




Usando o ângulo $\theta$ entre a reta $s$ e o eixo $x$ como parâmetro, mostre que $\gamma$ tem equações paramétricas $x = a\text{cotg}\,\theta + b\cos\theta$ e $y = a + b\,\text{sen}\,\theta$, $0 < |\theta| < \pi$.

24. A *espiral de Arquimedes* é a curva $\gamma$ descrita em coordenadas polares pela equação $r = a\theta$, $\theta \geq 0$, onde $a > 0$ é fixo.




① Encontre equações paramétricas para as espirais de Arquimedes.

② Mostre que $\gamma$ satisfaz a equação $x\tan(\sqrt{x^2+y^2}/a) = y$.

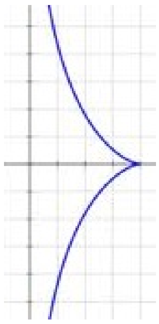
③ Mostre que a distância entre dois pontos de intersecção consecutivos de $\gamma$ com o eixo $x$ é constante igual a $2a\pi$.

25. Seja $\gamma$ uma curva diferenciável contida no primeiro quadrante, $P$ um ponto de $\gamma$, $r$ a reta tangente à $\gamma$ em $P$. Admitindo que $r$ não seja vertical, seja $Q$ o ponto de intersecção entre $r$ e o eixo $y$. Suponha que o segmento $PQ$ tenha comprimento constante igual a $a > 0$.

① Pondo $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, mostre que $\gamma$ satisfaz a equação diferencial $\frac{dy}{dx} = \pm\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x}$.

② Resolva esta equação fazendo a substituição trigonométrica $x = a\operatorname{sen}\theta$ e usando a relação trigonométrica $\operatorname{sen}\theta = \frac{2\tan(\theta/2)}{\sec^2(\theta/2)}$.

③ Mostre que $x(\theta) = a\cos\theta,\ y(\theta) = a\cos\theta + a\ln(\tan(\theta/2))$, $|\theta| < \pi/2$, é uma parametrização da curva $\gamma$. Esta curva é chamada de *tractriz* e seu traço é a figura abaixo.



**✩ Funções reais de duas e três variáveis**

26. Ache e esboce o domínio das funções:

(a) $f(x,y) = \sqrt{x-y}$ (b) $f(x,y) = \arctan\frac{y}{x}$
(c) $f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2-1}}$ (d) $f(x,y) = \frac{x}{y^x}$
(e) $f(x,y) = \tan(x-y)$ (f) $f(x,y) = \ln(xy^2 - x^3)$
(g) $f(x,y) = \ln(16 - 4x^2 - y^2)$

27. Esboce uma família de curvas de nível de:

(a) $f(x,y) = \frac{x+y}{x-y}$ (b) $f(x,y) = x - \sqrt{1-y^2}$
(c) $f(x,y) = \frac{x^2}{x^2-y^2}$ (d) $f(x,y) = \frac{2xy^2}{x^2+y^4}$

28. Esboce os gráficos de:

(a) $f(x,y) = 1-x-y$ (b) $f(x,y) = \frac{x}{x^2+1}$ (c) $f(x,y) = \sqrt{x^2+9y^2}$
(d) $f(x,y) = 4x^2+y^2$ (e) $f(x,y) = y^2-x^2$ (f) $f(x,y) = y^2+1$
(g) $f(x,y) = y^2+x$ (h) $f(x,y) = xy$ (i) $f(x,y) = e^{\sqrt{x^2+y^2}}$
(j) $f(x,y) = \frac{1}{4x^2+9y^2}$ (k) $f(x,y) = (x-y)^2$ (l) $f(x,y) = x^2+y^2+2y+3$
(m) $f(x,y) = \frac{1}{(x^2+2y^2)^2}$ (n) $f(x,y) = \ln(9x^2+y^2)$ (o) $f(x,y) = 2 - \sqrt[4]{x^2+4y^2}$
(p) $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2-9}$ (q) $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2+1}$

29. Seja $\gamma(t) = (e^t+1, e^{-t})$, para $t \in \mathbb{R}$.

① Desenhe a imagem de $\gamma$ indicando o sentido de percurso.

② A imagem de $\gamma$ está contida na curva de nível de $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x, y) = x^2y^2 - 2y - y^2 + 4$? Em caso afirmativo, em qual nível?

30. Em cada caso, esboce a superfície formada pelo conjunto dos pontos $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tais que:
(a) $x + 2y + 3z = 1$ (b) $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 1$ (c) $x^2 + y^2 - z^2 = 0$
(d) $x^2 + y^2 - z^2 = -1$ (e) $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ (f) $x^2 - y^2 = 1$
(g) $x^2 - y^2 + z^2 = 1$

Alguma dessas superfícies é o gráfico de uma função $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$?

31. Verifique que a imagem da curva $\gamma(t) = (\cos t, \cos t, \sqrt{2}\text{sen}\, t)$, $t \in [0, \pi[$, está contida numa esfera com centro em $(0, 0, 0)$ e esboce a imagem de $\gamma$.

32. Seja $\gamma(t) = (\sqrt{t^2+1}\cos t, \sqrt{t^2+1}\text{sen}\, t, t)$, $t \in \mathbb{R}$. Verifique que a imagem de $\gamma$ está contida na superfície $x^2 + y^2 - z^2 = 1$. Esboce a imagem de $\gamma$.

33. Desenhe as imagens das seguintes curvas:
(a) $\gamma(t) = (1, t, 1)$ (b) $\gamma(t) = (\cos t, \text{sen}\, t, 2)$
(c) $\gamma(t) = (e^{-t}\cos t, e^{-t}\text{sen}\, t, e^{-t})$, $t \ge 0$ (d) $\gamma(t) = (t, \cos t, \text{sen}\, t)$, $t \ge 0$
(e)$\gamma(t) = (\text{sen}\, t, \text{sen}\, t, \sqrt{2}\cos t), 0 \le t \le 2\pi$ (f) $\gamma(t) = (1 + \text{sen}\, t, 1 + \text{sen}\, t, \cos t)$

34. Seja $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2 + 4}$ e seja $\gamma(t) = (t\cos t, t\,\text{sen}\, t, \sqrt{t^2+4})$, $t \ge 0$.

(a) Mostre que a imagem de $\gamma$ está contida no gráfico de $f$.

(b) Faça um esboço da imagem de $\gamma$.

35. Encontre uma parametrização para a curva de nível no nível $k$ de $f$ nos casos:

① $f(x, y) = x + 2y - 3$, $k = -2$;

② $f(x, y) = x - \sqrt{1 - 2y^2}$, $k = 5$;

③ $f(x, y) = \frac{1}{x^2 - y^2}$, $k = 1$.

Encontre a reta tangente às curvas dos itens (a), (b) e (c) acima nos pontos $(\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$, $(6, 0)$ e $(\sqrt{2}, 1)$, respectivamente.

36. Encontre uma parametrização para as curvas $C$ abaixo:

① $C$ é a intersecção do parabolóide hiperbólico $z = y^2 - x^2$ com o cilindro $x^2 + y^2 = 1$.

② $C$ é a intersecção da superfície $x^2 + y^2 - 2z^2 = 1$ com o plano $y = 2z + 1$.

③ $C$ é a intersecção do plano $x = z$ com o parabolóide $x^2 + y^2 = z$.

④ $C$ é a intersecção do cone $z = \sqrt{4x^2 + y^2}$ com o plano $z = 2x + 1$.

⑤ $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1 \text{ e } z = x + 1\}$.

⑥ $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = \sqrt{x^2 + y^2} \text{ e } z = x + 1\}$.

⑦ $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1 \text{ e } (x - 1)^2 + y^2 + (z - 1)^2 = 1\}$.

37. Seja $f(x, y) = \frac{2x^2 + 4y^2}{x^2 + y^2 + 1}$.

① Esboce as curvas de nível de $f$ dos níveis $c=1$, $c=2$ e $c=3$.

② Encontre uma curva diferenciável $\gamma$ cuja imagem seja a curva de nível de $f$ do nível $c=1$.

③ Determine o vetor tangente à curva $\gamma$ do item anterior no ponto $(-1,0)$.

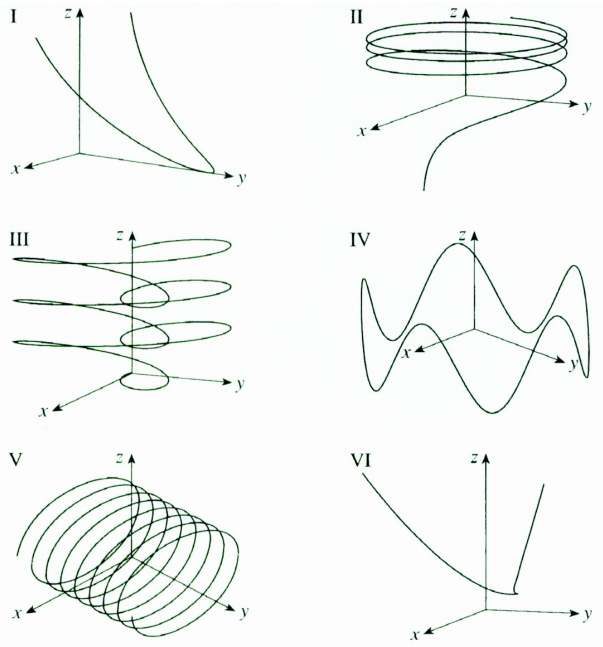
④ Seja $\gamma:[0,2\pi]\to\mathbb{R}^3$ dada por $\gamma(t)=(\operatorname{sen} t,\cos t,z(t))$. Sabendo que a imagem da curva está contida no gráfico de $f$, encontre o vetor tangente a $\gamma$ em $\gamma(\frac{\pi}{3})$.

38. Combine as equações com os esboços das imagens. Justifique a sua escolha:

(a) $\gamma(t)=(\cos 4t, t, \operatorname{sen} 4t)$ (b) $\gamma(t)=(t^2-2, t^3, t^4+1)$

(c) $\gamma(t)=(t, \frac{1}{1+t^2}, t^2)$ (d) $\gamma(t)=(\operatorname{sen} 3t\,\cos t, \operatorname{sen} 3t\,\operatorname{sen} t, t)$

(e) $\gamma(t)=(\cos t, \operatorname{sen} t, \ln t)$ (f) $\gamma(t)=(\cos t, \operatorname{sen} t, \operatorname{sen} 5t)$




### ✰ Limites e continuidade

39. Calcule os seguintes limites, caso existam. Se não existirem, explique por quê:

(a) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$ (b) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y\cos(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$

(c) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$ (d) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{2x^4+x^2y+y^2}$

(e) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x^2+3xy+4y^2}{3x^2+5y^2}$ (f) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^4+y^2}$

(g) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^3-y}$ (h) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4\operatorname{sen}(x^2+y^2)}{x^4+y^2}$

(i) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x+y)^3}{x^2+y^2}$ (j) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{x^2+y^2}\operatorname{sen}\left(\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$

(k) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3y+y^4+x^4}{x^3y-xy^3}$ (l) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3+\operatorname{sen}(x^2+y^2)}{y^4+\operatorname{sen}(x^2+y^2)}$

(m) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\operatorname{sen}(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$ (n) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} (x^2+y^2)\ln(x^2+y^2)$

(o) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^4}{x^2+y^8}$ (p) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2\operatorname{sen}^2 y}{x^2+2y^2}$

40. Determine o conjunto dos pontos de continuidade das funções abaixo:

(a) $f(x,y)=\frac{\operatorname{sen}(xy)}{e^x-y^2}$

(b) $f(x,y)=\frac{\sqrt{x-y^3}}{1-x^2-y^2}$

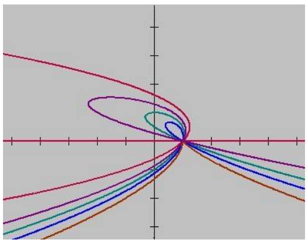
(c) $f(x,y)=\arctan(x+\sqrt{1/y})$

(d) $f(x,y)=\arcsin(x^2+y^2)$

(e) $f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^2y^3}{2x^2+y^3} & \text{, se } (x,y)\neq(0,0)\\ 1 & \text{, se } (x,y)=(0,0)\end{cases}$

(f) $f(x,y)=\begin{cases}\frac{(x^2-y^2)(x-1)^2}{(x^2+y^2)((x-1)^2+(y-1)^2)} & \text{, se } (x,y)\neq(0,0) \text{ e } (x,y)\neq(1,1)\\ 1 & \text{, se } (x,y)=(0,0) \text{ ou } (x,y)=(1,1)\end{cases}$

41. O domínio de uma função $f$ é o conjunto $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2|(x,y)\neq(1,0)\}$. A figura abaixo mostra as curvas de nível de $f$ nos níveis $k=0$, $k=0,3$, $k=0,5$, $k=0,7$ e $k=1$. Existe $\lim\limits_{(x,y)\to(1,0)} f(x,y)$? Justifique.



**✰ Respostas**

**(2)** (a)-IV, (b)-VI, (c)-V, (d)-III, (e)-I, (f)-II; **(3)** Não; $\gamma(t)=(t^3,t^2)$; **(4)** $(x,y)=(0,0)+t(\pm1,0)$; **(6)** $x(\theta)=r(\theta-\operatorname{sen}\theta)$ e $y(\theta)=r(1-\cos\theta)$; **(7)** ① $64\sqrt{5}$, ② $\sqrt{2}$, ③ $\pi^2/2$; **(8)** $8r$; **(10)** $6a(\sqrt{2}+\ln(1+\sqrt{2}))$; **(11)** $x(\theta)=r\theta+(R-r)\operatorname{sen}\theta$ e $y(\theta)=r\theta+(R-r)\cos\theta$; **(12)** $t=1$: $x-y-1=0$ e $t=-2$: $2x+y-11=0$; **(15)** ① $r=a$; ② $r=1/(2\cos\theta+3\operatorname{sen}\theta)$; ③ $r=1/\sqrt{\cos(2\theta)}$; ④ $r=1/\sqrt{\cos^2\theta+2\operatorname{sen}^2\theta}$; ⑤ $r=e^\theta$; ⑥ $r=(\cos^{2/3}\theta+\operatorname{sen}^{2/3}\theta)^{-3/2}$; ⑦ $r=1/\theta$; ⑧ $r=2|\operatorname{sen}(2\theta)|$; **(16)** $x=rt-R\operatorname{sen}t$ e $y=r-R\cos t$; **(21)** ③ $x=2r\operatorname{cotg}\theta$ e $y=2r\operatorname{sen}^2\theta$; **(22)** ② $x=2r\operatorname{sen}^2\theta$ e $y=2r\left(\tan\theta-\frac{\operatorname{sen}(2\theta)}{2}\right)$; **(24)** $x=a\theta\cos\theta$ e $y=a\theta\operatorname{sen}\theta$; **(26)** (a) $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y\leq x\}$; (b) $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x\neq 0\}$; (c) $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2>1\}$; (d) $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y>0\}$; (e) $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y\neq x+\frac{1+2k}{2}\pi,\ k\in\mathbb{Z}\}$; (f) $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x(y-x)(y+x)>0\}$; (g) $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 4x^2+y^2<16\}$; **(35)** ① $x=1-2t$, $y=t$; ② $x=5+\sqrt{1-2t^2}$ e $y=t$; ③ $x=\cosh t$, $y=\sinh t$; **(36)** ① $\gamma(t)=(\cos t,\operatorname{sen}t,\cos 2t)$; ② $\gamma(t)=(2^{-1/2}\cos t,\operatorname{sen}t,-1/2+(1/2)\operatorname{sen}t)$; ③ $\gamma(t)=\frac{1}{2}(1+\cos t,\operatorname{sen}t,1+\cos t)$; ④ $\gamma(t)=(t,4t+1,\sqrt{20t^2+8t+1})$, $t\geq-1/2$; ⑤ $\gamma(t)=(\frac{1}{2}(1+\cos t),2^{-1/2}\operatorname{sen}t,\frac{1}{2}(3+\cos t)$; ⑥ $\gamma(t)=(\frac{t^2-1}{2},t,\frac{t^2+1}{2})$; ⑦ $\gamma(t)=(\frac{1}{2}(1+\cos t),2^{-1/2}\operatorname{sen}t,\frac{1}{2}(1-\cos t))$; **(38)** a-V, b-VI, c-I,d-III, e-II, f-IV; **(39)** Os limites (a), (d), (f), (g), (k), (o) não existem; (b), (c), (h), (i), (j), (n), (p) existem e valem zero; (l), (m) existem e valem 1; **(40)** (a) $\{(x,y): y\neq e^{x/2}\}$; (b) $\{(x,y): x\geq y^3 \text{ e } x^2+y^2\neq 1\}$; (c) $\{(x,y): y\geq 0\}$; (d) $\{(x,y): x^2+y^2\leq 1\}$; (e) $\mathbb{R}^2$;
(f) $\{(x,y): (x,y)\neq(0,0) \text{ e } (x,y)\neq(1,1)\}$; **(41)** Não.

## Parte 2

### ✰ Derivadas parciais, gradiente e diferenciabilidade

1. Ache as derivadas parciais de primeira ordem das funções:

   (a) $f(x,y) = \arctan(y/x)$ (b) $f(x,y) = \ln(1+\cos^2(xy^3))$ (c) $f(x,y) = \frac{1-xy}{1+x^2+y^2}$

2. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável. Calcule as derivadas parciais de primeira ordem de:

   (a) $u(x,y) = f\left(\dfrac{x}{y}\right)$ (b) $u(x,y) = f(ax+by)$, onde $a$ e $b$ são constantes.

   (c) $u(x,y) = f(xy^2 - 2x)$ (d) $u(x,y) = f(e^{x^2+y^2})$

3. Dada a função $f(x,y) = x(x^2+y^2)^{-\frac{3}{2}} e^{\text{sen}\,(x^2y)}$, ache $\frac{\partial f}{\partial x}(1,0)$. (Neste caso, usar a definição de derivada parcial é menos trabalhoso do que aplicar as regras de derivação.)

4. Verifique que a função $u(x,y) = \ln\sqrt{x^2+y^2}$ é solução da equação de Laplace bidimensional $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$.

5. Sejam $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, deriváveis até 2a. ordem.

   (a) Mostre que $u(x,t) = f(x+ct) + g(x-ct)$ satisfaz a equação $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$.

   (b) Mostre que $u(x,y) = xf(x+y) + yg(x+y)$ é solução da equação

   $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

6. Sejam $f(x,y) = (x^2+y^2)^{\frac{2}{3}}$ e $g(x,y) = |xy|^{\frac{5}{4}}$. Mostre que $f$ e $g$ são de classe $C^1$ em $\mathbb{R}^2$.

7. Calcule $\dfrac{\partial w}{\partial t}$ e $\dfrac{\partial w}{\partial u}$ pela regra da cadeia e confira os resultados por meio de substituição seguida de aplicação das regras de derivação parcial.

   (a) $w = x^2 + y^2; x = t^2 + u^2, y = 2tu$.

   (b) $w = \dfrac{x}{x^2+y^2}; x = t\cos u, y = t\,\text{sen}\,u$.

   (c) $w = x^2 + y^2 + z; x = tu, y = t + u, z = t^2 + u^2$.

8. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função de classe $C^2$. Calcule $g_u, g_v$, em função de $f_x, f_y$ nos seguintes casos:

   (a) $g(u,v) = f(u^2, v^3)$ (b) $g(u,v) = \text{sen}\,u - f(2u - 3v^2, u - \cos v)$

   (c) $g(u,v) = f(\text{sen}\,(u+v), \cos(u-v))$ (d) $g(u,v) = f(e^{u^2}, \ln(u+v))$

9. Uma função $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ é **homogênea de grau** $\lambda$ se satisfaz $f(tx,ty) = t^\lambda f(x,y)$ para todos $t > 0$ e $(x,y) \neq (0,0)$, para um certo $\lambda \in \mathbb{R}$ fixo. Supondo que $f$ é uma função de classe $\mathbb{C}^2$ homogênea de grau $\lambda$, verifique que:

   (a) $xf_x + yf_y = \lambda f$; (Relação de Euler)

(b) As funções $f_x$ e $f_y$ são homogêneas de grau $\lambda - 1$.

10. Verifique que as funções abaixo são homogêneas e determine o grau:

(a) $f(x,y) = 5x^2 + 2xy - y^2$ (b) $f(x,y) = \dfrac{xe^{\frac{x}{y}}}{x^2+y^2}$

(b) $f(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{x^3+y^3}}$ (c) $f(x,y) = \frac{xy\,\mathrm{sen}\,(y/x)}{x^4+y^4}$

11. Seja $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^4} + \mathrm{sen}\,(x+3y) & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{se} \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$

(a) Mostre que as derivadas parciais $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ existem em todos os pontos.

(b) $f$ é contínua em $(0,0)$?

(c) $f$ é diferenciável em $(0,0)$?

12. Seja $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3}{x^2+y^2} & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{se} \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$

(a) Mostre que $f$ é contínua em (0,0).

(b) Calcule $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$.

(c) $f$ é diferenciável em $(0,0)$?

(d) São $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ contínuas em $(0,0)$?

13. Considere $f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\mathrm{sen}\left(\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{se} \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$

(a) Mostre que $f$ é diferenciável em $(0,0)$.

(b) As derivadas parciais $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ são contínuas em $(0,0)$?

14. Seja $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2\mathrm{sen}\left((x^2+y^2)^2\right)}{x^2+y^2} & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{se} \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$

(a) Verifique que $f$ é contínua em $(0,0)$.

(b) Determine $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y), (x,y) \in \mathbb{R}^2$.

(c) A função $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ é contínua em $(0,0)$? Justifique sua resposta.

(d) A função $f$ é diferenciável em $(0,0)$? Justifique sua resposta.

15. Seja $f(x,y) = \begin{cases} xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{se} \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$

(a) Verifique que $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,y) = -y$ para todo $y$, e que $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,0) = x$, para todo $x$.

(b) Verifique que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = 1$ e que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = -1$.

16. Determine o conjunto de pontos de $\mathbb{R}^2$ onde $f$ **não** é diferenciável, sendo:

(a) $f(x,y) = \sqrt[3]{x^3+y^3}$
(b) $f(x,y) = x|y|$
(c) $f(x,y) = \mathrm{e}^{\sqrt{x^4+y^4}}$
(d) $f(x,y) = \cos(\sqrt{x^2+y^2})$

17. Mostre que não existe nenhuma função diferenciável $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que $\nabla f(x,y) = (x^2 y, y^2)$ para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

18. O raio de um cilindro circular está decrescendo à taxa de 1,2cm/s enquanto sua altura está crescendo à taxa de 3cm/s. A que taxa o volume do cilindro está variando quando o raio vale 80 cm e a altura vale 150 cm?

19. Sejam $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, diferenciável em $\mathbb{R}^2$, com $\nabla f(-2,-2) = (a,-4)$ e

$$g(t) = f(2t^3 - 4t, t^4 - 3t).$$

Determine $a$ para que a reta tangente ao gráfico de $g$ no ponto de abscissa 1 seja paralela à reta $y = 2x + 3$.

20. Seja $u = u(x,y)$ função de classe $C^2$ em $\mathbb{R}^2$ e defina $v(r,\theta) = u(r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta)$. Verifique que

$$\frac{\partial^2 v}{\partial r^2}(r,\theta) + \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r}(r,\theta) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2}(r,\theta) = \Delta u(r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta),$$

onde, por definição, $\Delta u = u_{xx} + u_{yy}$.

21. Seja $f = f(x,y)$ uma função de classe $\mathbb{C}^2$ e seja $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $g(u,v) = uf(u^2 - v, u + 2v)$.

(a) Determine $\dfrac{\partial^2 g}{\partial u \partial v}$ em função das derivadas parciais de $f$.

(b) Sabendo que $3x + 5y = z + 26$ é o plano tangente ao gráfico de $f$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1,4) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,4) = 1$ e $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1,4) = -1$, calcule $\dfrac{\partial^2 g}{\partial u \partial v}(-2,3)$.

22. Seja $F(r,s) = G(\mathrm{e}^{rs}, r^3\cos(s))$, onde $G = G(x,y)$ é uma função de classe $\mathbb{C}^2$ em $\mathbb{R}^2$.

(a) Calcule $\dfrac{\partial^2 F}{\partial r^2}(r,s)$ em função das derivadas parciais de $G$.

(b) Determine $\dfrac{\partial^2 F}{\partial r^2}(1,0)$ sabendo que $\dfrac{\partial G}{\partial y}(t^2+1, t+1) = t^2 - 2t + 3$.

23. Ache a equação do plano tangente e a equação da reta normal a cada superfície no ponto indicado:

(a) $z = e^{x^2+y^2}$, no ponto $(0,0,1)$  (b) $z = \ln(2x+y)$, no ponto $(-1,3,0)$
(c) $z = x^2 - y^2$, no ponto $(-3,-2,5)$.  (d) $z = e^x \ln y$, no ponto $(3,1,0)$.

24. Determine a equação do plano que passa pelos pontos $(0,1,5)$ e $(0,0,6)$ e é tangente ao gráfico de $g(x,y) = x^3 y$.

25. Determine $k \in \mathbb{R}$ para que o plano tangente ao gráfico de $f(x,y) = \ln(x^2+ky^2)$ no ponto $(2,1,f(2,1))$ seja perpendicular ao plano $3x+z=0$.

26. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função derivável. Mostre que todos os planos tangentes à superfície $z = xf\left(\frac{x}{y}\right)$ passam pela origem.

27. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f$ com derivadas parciais contínuas em $\mathbb{R}^2$ e tal que $2x+y+z=7$ é o plano tangente ao gráfico de $f$ no ponto $\big(0,2,f(0,2)\big)$. Seja

$$g(u,v) = u\,f\big(\mathrm{sen}\,(u^2-v^3), 2u^2v\big).$$

Determine $a \in \mathbb{R}$ para que o plano tangente ao gráfico de $g$ no ponto $\big(1,1,g(1,1)\big)$ seja paralelo ao vetor $(4,2,a)$.

28. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável tal que as imagens das curvas $\gamma(t) = (2,t,2t^2)$ e $\mu(t) = (2t^2,t,2t^4)$ estejam contidas no gráfico de $f$. Determine o gradiente de $f$ no ponto $(2,1)$.

29. O gradiente de $f(x,y) = x^2 + y^4$ é tangente à imagem da curva $\gamma(t) = (t^2,t)$, $t>0$ em um ponto $P$. Encontre a equação da reta tangente à curva de nível de $f$ que contém $P$, no ponto $P$.

30. Ache a derivada direcional máxima de $f$ no ponto dado e dê a direção em que ela ocorre.

(a) $f(x,y) = xe^{-y} + 3y$, $(1,0)$;  (b) $f(x,y) = \ln(x^2+y^2)$, $(1,2)$;

31. Mostre que $f(x,y) = \sqrt[3]{x^2y}$ é contínua em $(0,0)$ e tem todas as derivadas direcionais em $(0,0)$. É $f$ diferenciável em $(0,0)$?

32. Seja $f$ uma função diferenciável em $\mathbb{R}^2$ tal que $\gamma(t) = (t+1,-t^2)$, $t \in \mathbb{R}$, é uma curva de nível de $f$. Sabendo que $\frac{\partial f}{\partial x}(-1,-4) = 2$, determine a derivada direcional de $f$ no ponto $(-1,-4)$ e na direção e sentido do vetor $\vec{u} = (3,4)$.

33. Seja $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2}, & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{se} \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$

(a) Calcule o gradiente de $f$ no ponto $(0,0)$.

(b) Mostre que $\dfrac{d}{dt} f\big(\gamma(t)\big) \neq \nabla f\big(\gamma(t)\big) \cdot \gamma'(t)$ em $t=0$, onde $\gamma(t) = (-t,-t)$.

(c) Seja $\vec{u} = (a,b)$ um vetor unitário (isto é, $a^2+b^2=1$). Use a definição de derivada direcional para calcular $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(0,0)$.

(d) $f$ é diferenciável em $(0,0)$? Justifique.

34. Seja $a > 0$ e considere o plano tangente à superfície $xyz = a$ num ponto do primeiro octante. Mostre que o tetraedro formado por este plano e os planos coordenados tem volume independente do ponto de tangência.

35. Ache os pontos do hiperbolóide $x^2 - y^2 + 2z^2 = 1$ onde a reta normal é paralela à reta que une os pontos $(3, -1, 0)$ e $(5, 3, 6)$.

### ✰ Máximos e mínimos

36. Determine os pontos críticos das funções abaixo e classifique-os:

| | | |
|---|---|---|
| (a) $z = 2x^2 + xy + 3y^2 + 10x - 9y + 11$ | (b) $z = 3xy^2 + y^2 - 3x - 6y + 7$ | (c) $z = x^2y^2$ |
| (d) $z = x^3y^3$ | (e) $z = y\sqrt{x} - y^2 - x + 6y$ | (f) $z = y\cos x$ |
| (g) $z = (2x - x^2)(2y - y^2)$ | (h) $z = y^4 + 4x^2y - 4x^2 - 8y^2$ | (i) $z = xye^{-x^2-y^2}$ |
| (j) $z = \ln(3x^2 + 4y^2 - 2x + 7)$ | (k) $z = (x-1)^3 + (y-2)^3 - 3x - 3y$ | |

37. Encontre uma parametrização para $C$ e use esta parametrização para encontrar, caso existam, os valores máximo e mínimo de $f$ em $C$, bem como os pontos onde estes valores são assumidos, onde:

(a) $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 2y^2 = 1\}$ e $f(x, y) = x^3y$.

(b) $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = z \text{ e } z = 2y\}$ e $f(x, y, z) = x - z$.

(c) $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1 \text{ e } (x-1)^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1\}$ e $f(x, y, z) = xz + y$.

(d) $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 1 \text{ e } x - y + 3z = 3\}$ e $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$.

38. Ache a derivada direcional máxima de $f$ no ponto dado e dê a direção em que ela ocorre.

(a) $f(x, y, z) = xe^z + \text{sen}(y)$, $P = (2, 0, 0)$ (b) $f(x, y, z) = -\frac{4}{y} + z\ln(x)$, $P = (1, 2, -1)$

39. Suponha que sobre uma certa região do espaço o potencial elétrico $V$ é dado por

$$V(x, y, z) = 5x^2 - 3xy + xyz.$$

(a) Ache a taxa de variação do potencial em $P(3, 4, 5)$ na direção do vetor $\vec{v} = \vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$.

(b) Em que direção $V$ muda mais rapidamente em $P$?

(c) Qual é a maior taxa de variação em $P$?

40. Ache o máximo e o mínimo absolutos da função na região $D$ indicada.

(a) $f(x, y) = 5 - 3x + 4y$; $D$ é o triângulo (com interior e bordas) cujos vértices são $(0, 0)$, $(4, 0)$ e $(4, 5)$

(b) $f(x, y) = xye^{-x^2-y^2}$; $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 2,\ x \leq 0,\ y \geq 0\}$

(c) $f(x, y) = 2x^3 + y^4$; $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$

(d) $f(x, y) = 2x^2 - xy + y^2 + 7x$; $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, -3 \leq x \leq 3,\ -3 \leq y \leq 3\}$.

(e) $f(x, y) = (4x - x^2)\cos y$; $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x \leq 3,\ -\frac{\pi}{4} \leq y \leq \frac{\pi}{4}\}$

41. Determine o valor máximo e o valor mínimo da função $f$ sujeita às restrições explicitadas:

(a) $f(x,y) = xy; \quad 5x^2 + 5y^2 + 6xy - 64 = 0$

(b) $f(x,y,z) = xyz; \quad x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 6$

(c) $f(x,y,z) = x^2y^2z^2; \quad x^2 + y^2 + z^2 = 1$

(d) $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2; \quad x^4 + y^4 + z^4 = 1$

42. Determine o valor máximo e o valor mínimo de $f$ em $R$ sendo

(a) $f(x,y,z) = x^2 - 2x + y^2 - 4y + z^2 - 6z$ e $R = \{(x,y,z) : x^2 + y^2 + z^2 \le 56\}$

(b) $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + 2z^2 - 4xy - 4z + 3x$ e $R = \{(x,y,z) : x \ge 0, y \ge 0, z \ge 0, x + y + z \le 4\}$

43. Encontre o máximo e o mínimo absolutos de $f(x,y)$ em $D$ sendo:

(a) $f(x,y) = xy; \quad D = \left\{(x,y) \,:\, x^2 - y^2 = 1, \;\; x \in [1,2]\right\}$

(b) $f(x,y) = 2x^3 + y^4; \quad D = \left\{(x,y) \,:\, x^2 + y^2 = 1, \;\; x \in [0,1/4], \;\; y \ge 0\right\}$

44. Encontre os pontos da elipse $x^2 + xy + y^2 = 3$ mais próximos de $(0,0)$.

45. Qual o ponto do plano $x + 2y - z + 4 = 0$ que está mais próximo do ponto $(1,1,1)$?

46. Determine o maior produto de 3 números reais positivos cuja soma é 100. Exiba tais números.

47. Determine a distância entre as retas de equação
$X = (-2,3,-1) + \alpha(4,1,5)$, $\alpha \in \mathbb{R}$ e $X = (-1,0,3) + \mu(-2,3,1)$, $\mu \in \mathbb{R}$.

48. Qual é o ponto da superfície $z^2 = xy + 1$ que está mais próximo da origem?

49. Seja $b \ne 0$ e $f(x,y) = \frac{y^4}{4} + bx^2y - bx^2 - 2y^2$.

(a) Determine, em função de $b$, o número de pontos críticos de $f$ e classifique-os.

(b) Faça $b = 3$ e ache os extremos de $f$ no triângulo (fronteira e interior) de vértices $(0,0)$, $(3,3)$ e $(-3,3)$.

50. Seja $f(x,y) = a(x^2 + y^2) - 2xy$, onde $a$ é uma constante.

(a) Verifique que, para todo $a \in \mathbb{R}$, o par $(0,0)$ é um ponto crítico de $f$.

(b) Para cada valor de $a$, classifique o ponto crítico $(0,0)$ com relação a máximos e mínimos locais e sela. Existem valores de $a$ para os quais podemos afirmar que $(0,0)$ é extremo global (absoluto) de $f$?

51. A temperatura num ponto $(x,y,z)$ do espaço é dada por $T(x,y,z) = xy + yz$. Determine os pontos da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ onde a temperatura é mais alta e onde é mais baixa. Justifique.

52. Determine as dimensões de um paralelepípedo de volume máximo, com faces paralelas aos planos coordenados, de modo que uma das faces está contida no plano $z = 0$ e a correspondente face oposta tem os seus vértices no parabolóide $z = 4 - x^2 - y^2$, $z > 0$.

53. Um pentágono de 12 cm de perímetro é construído colocando-se um triângulo isósceles sobre um retângulo. Dentre esses pentágonos, determine as medidas dos lados daquele que tem área máxima.

54. Determine a equação do plano que passa por $(2,2,1)$ e que delimita no primeiro octante o tetraedro de menor volume.

55. Dentre todos os planos que são tangentes à superfície $xy^2z^2 = 1$ encontre aqueles mais distantes da origem.

56. Dê as dimensões da caixa retangular sem tampa de maior volume que pode ser construída com $27cm^2$ de papelão.

### ✰ Respostas

(1) (a) $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -\frac{y}{x^2+y^2}$; $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}$; (b) $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{-y^3 \operatorname{sen}(2xy^3)}{1+\cos^2(xy^3)}$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{3xy^2 \operatorname{sen}(2xy^3)}{1+\cos^2(xy^3)}$;
(c) $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{x^2y-y^3-y-2x}{(1+x^2+y^2)^2}$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{xy^2-x^3-x-2y}{(1+x^2+y^2)^2}$;

(2) (a) $\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) = \frac{1}{y}f'\left(\frac{x}{y}\right)$; $\frac{\partial u}{\partial y}(x,y) = -\frac{x}{y^2}f'\left(\frac{x}{y}\right)$; (b) $\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) = af'(ax+by)$; $\frac{\partial u}{\partial y}(x,y) = bf'(ax+by)$;
(c) $\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) = (y-2)f'(xy^2-2x)$; $\frac{\partial u}{\partial y}(x,y) = xf'(xy^2-2x)$; (d) $\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) = 2xf(e^{x^2+y^2})$; $\frac{\partial u}{\partial y}(x,y) = 2yf(e^{x^2+y^2})$; (3) $-2$;

(8) (a) $g_u = 2uf_x(u^2,v^3)$; $g_v = 3v^2 f_y(u^2,v^3)$; (b) $g_u = \cos u - 2f_x(2u-3v^2, u-\cos v) - f_y(2u-3v^2, u-\cos v)$; $g_v = -6vf_x(2u-3v^2, u-\cos v) + \operatorname{sen} v f_y(2u-3v^2, u-\cos v)$;
(c) $g_u = \cos(u+v)f_x(\operatorname{sen}(u+v), \cos(u-v)) - \operatorname{sen}(u-v)f_y(\operatorname{sen}(u+v), \cos(u-v))$;
$g_v = \cos(u+v)f_x(\operatorname{sen}(u+v), \cos(u-v)) + \operatorname{sen}(u-v)f_y(\operatorname{sen}(u+v), \cos(u-v))$;
(d) $g_u = 2ue^{u^2}f_x(e^{u^2}, \ln(u+v)) + \frac{f_y(e^{u^2}, \ln(u+v))}{u+v}$; $g_v = \frac{f_y(e^{u^2}, \ln(u+v))}{u+v}$;

(10) (a) $\lambda = 2$; (b) $\lambda = -1$; (c) $\lambda = -1/3$; (d) $\lambda = -2$;

(11) (b) Não é contínua em (0,0); (c) Não é diferenciável em (0,0);

(12) (b) $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 1$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$.; (c) Não; (d)Nenhuma das derivadas parciais é contínua em $(0,0)$.

(13) (b) Não; (14) (b) $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \begin{cases} \frac{4x^2y(x^2+y^2)^2\cos((x^2+y^2)^2) - 2x^2y\operatorname{sen}((x^2+y^2)^2)}{(x^2+y^2)^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$

(c) Sim; (d) Sim.

(16) (a) $f$ não é diferenciável em nenhum ponto da reta $y = -x$; (b) $f$ não é diferenciável nos pontos da forma $(a,0)$ com $a \neq 0$; (c) $f$ é diferenciável em $\mathbb{R}^2$ pois é de classe $\mathbb{C}^1$; (d) Idem ao item (c).

(18) $-9600\pi$ cm$^3$/s; (18) $a = 3$; (21) (b) 21.

(22) (a) $\frac{\partial^2 F}{\partial r^2} = s^2 e^{2rs}\frac{\partial^2 G}{\partial x^2} + 6r^2 e^{rs} s\cos s\frac{\partial^2 G}{\partial x\partial y} + 9r^4\cos^2 s\frac{\partial^2 G}{\partial y^2} + s^2e^{rs}\frac{\partial G}{\partial x} + 6r\cos s\frac{\partial G}{\partial y}$; (b)0;

(23) (a) $z = 1$; $X = (0,0,1) + \lambda(0,0,1)$, $\lambda \in \mathbb{R}$; (b)$2x + y - z - 1 = 0$; $X = (-1,3,0) + \lambda(2,1,-1)$, $\lambda \in \mathbb{R}$;
(c) $6x - 4y + z + 5 = 0$; $X = (-3,-2,5) + \lambda(6,-4,1)$, $\lambda \in \mathbb{R}$; (d) $e^3y - z - e^3 = 0$; $X = (3,1,0) + \lambda(0,e^3,-1)$, $\lambda \in \mathbb{R}$;

(24) $6x - y - z + 6 = 0$; (25) $k = 8$;

(27) $a = -4$; (28) $(1,4)$; (29) $X = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right) + \lambda(-1,1)$, $\lambda \in \mathbb{R}$;

(30) (a) $\sqrt{5}$, $(1,2)$ ; (b) $\frac{2}{\sqrt{5}}$, $\left(\frac{1}{5}, \frac{2}{5}\right)$;

(31) $f$ não é diferenciável em $(0,0)$; (32) $4/5$; (33) (d) Não; (35) $\pm\left(\sqrt{\frac{2}{3}}, -2\sqrt{\frac{2}{3}}, \sqrt{\frac{3}{3}}\right)$

(36) (a) $(-3,2)$ mínimo; (b) $(2/3,1)$, $(-4/3,-1)$ selas; (c) $(0,\lambda)$ e $(\lambda,0)$ com $\lambda\in\mathbb{R}$ mínimos; (d) $(0,\lambda)$ e $(\lambda,0)$ com $\lambda\in\mathbb{R}$ selas; (e) $(4,4)$ máximo; (f) $(\pi/2+k\pi,0)$ com $k\in\mathbb{Z}$ selas; (g) $(1,1)$ máximo, $(0,0),(2,0),(0,2),(2,2)$ selas; (h) $(0,0)$ máximo, $(0,2)$ mínimo, $(0,-2),(\sqrt{3},1),(-\sqrt{3},1)$ selas; (i) $(0,0)$ sela, $\pm(1/\sqrt{2},1/\sqrt{2})$ máximos, $\pm(-1/\sqrt{2},1/\sqrt{2})$ mínimos; (j) $(1/3,0)$ mínimo; (k) $(2,1)$ e $(0,3)$ sela; $(2,3)$ mínimo e $(0,1)$ máximo;

(37) (a) pontos de máximo: $(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2\sqrt{2}})$ e $(-\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{1}{2\sqrt{2}})$; pontos de mínimo: $(-\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2\sqrt{2}})$ e $(\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{1}{2\sqrt{2}})$. (b) ponto de máximo: $(\frac{1}{\sqrt{5}},1-\frac{2}{\sqrt{5}},2-\frac{4}{\sqrt{5}})$; ponto de mínimo: $(-\frac{1}{\sqrt{5}},1+\frac{2}{\sqrt{5}},2+\frac{4}{\sqrt{5}})$. (c) ponto de máximo: $(\frac{1}{2},\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{2})$; ponto de mínimo: $(\frac{1}{2},-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{2})$. (d) ponto de mínimo: $(\frac{1}{3},-\frac{1}{6},\frac{5}{6})$; não tem ponto de máximo.

(38) a) $\sqrt{6}$ ; $(1,1,2)$; (b) $\sqrt{2}$ ; $(-1,1,0)$; (39) (a) $\frac{32}{\sqrt{3}}$; (b) $(38,6,12)$; (c) $2\sqrt{406}$;

(40) (a) máximo: $f(4,5)=13$, mínimo: $f(4,0)=-7$; (b) máximo: $f(0,0)=0$, mínimo: $f(-1/\sqrt{2},1/\sqrt{2})=-\frac{1}{2e}$; (c) máximo: $f(1,0)=2$, mínimo: $f(-1,0)=-2$; (d) máximo: $f(2,0)=4$, mínimo: $f(3,-\frac{\pi}{4})=f(3,\frac{\pi}{4})=f(1,-\frac{\pi}{4})=f(1,\frac{\pi}{4})=\frac{3\sqrt{2}}{2}$.

(41) (a) max $f(2,2)=f(-2,-2)=4$; min $f(4,-4)=f(-4,4)=-16$; (b) max $2/\sqrt{3}$, min $-2/\sqrt{3}$; (c) max $1/27$, min $0$; (d) max $\sqrt{3}$, min $1$.

(43) (a) mínimo: $-2\sqrt{3}$ e máximo $2\sqrt{3}$; (b) mínimo: $\frac{1}{32}+\left(\frac{15}{16}\right)^2$ e máximo $1$.

(44) (a) $(1,1)$ e $(-1,-1)$; (45) $(0,-1,2)$; (46) $n_1=n_2=n_3=\frac{100}{3}$; (47) $\sqrt{12}$; (48) $(0,0,1)$ ou $(0,0,-1)$;

(49) (a) Se $b>0$, temos 5 pontos críticos: $\left(\pm\sqrt{\frac{3}{b}},1\right)$ e $(0,-2)$ pontos de sela; $(0,-2)$ máximo local e $(0,2)$ mínimo local; e se $b<0$, temos 3 pontos críticos: $(0,0)$ e $(0,2)$ pontos de sela; $(0,-2)$ mínimo local; (b) Pontos de máximo: $(-3,3)$ e $(3,3)$; ponto de mínimo. $(0,2)$;

(50) (b) $a>1$: mínimo local; $-1<a<1$: sela; $a<-1$: máximo local; $a\geq 1$: $(0,0)$ é ponto de mínimo global; $a\leq -1$: $(0,0)$ é ponto de máximo global;

(51) Mais quentes: $\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{1}{2}\right)$, $\left(\frac{-1}{2},\frac{-\sqrt{2}}{2},\frac{-1}{2}\right)$; Mais frios : $\left(\frac{1}{2},\frac{-\sqrt{2}}{2},\frac{1}{2}\right)$, $\left(\frac{-1}{2},\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{-1}{2}\right)$;

(52) O paralelepípedo tem vértices em $(\pm1,\pm1,0)$ e $(\pm1,\pm1,2)$; (53)

(53) $12(2-\sqrt{3})$, $2(3-\sqrt{3})$, $4(2\sqrt{3}-3)$; (54) $x+y+2z-6=0$;

(55) $2^{2/5}x+2^{9/10}y+2^{9/10}z=5$; $2^{2/5}x-2^{9/10}y+2^{9/10}z=5$; (56) base $3cm\times 3cm$ e altura $1,5cm$.

## Parte 3

### ☆ Integrais múltiplas

1. Calcule as seguintes integrais duplas:

   (a) $\int\int_R (2y^2 - 3xy^3)\,dxdy$, onde $R = \{(x,y) : 1 \le x \le 2, 0 \le y \le 3\}$.

   (b) $\int\int_R x\text{sen}\, y\,dxdy$, onde $R = \{(x,y) : 1 \le x \le 4, 0 \le y \le \frac{\pi}{6}\}$.

   (c) $\int\int_R \frac{1}{x+y}\,dxdy$, onde $R = [1,2] \times [0,1]$.

2. Determine o volume do sólido limitado pela superfície $z = x\sqrt{x^2+y}$ e os planos $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$, $y = 1$ e $z = 0$. .

3. Determine o volume do sólido contido no primeiro octante limitado pelo cilindro $z = 9 - y^2$ e pelo plano $x = 2$.

4. Calcule as integrais iteradas $\int_0^1\int_0^1 \frac{x-y}{(x+y)^3}\,dydx$ e $\int_0^1\int_0^1 \frac{x-y}{(x+y)^3}\,dxdy$. As respostas contradizem o Teorema de Fubini? Explique.

5. Calcule as seguintes integrais duplas:

   (a) $\int\int_D xy\,dxdy$, onde $D = \{(x,y) : 0 \le x \le 1, x^2 \le y \le \sqrt{x}\}$.

   (b) $\int\int_D (x^2 - 2xy)\,dxdy$, onde $D = \{(x,y) : 0 \le x \le 1, \sqrt{x} \le y \le 2 - x\}$.

   (c) $\int\int_D e^{x/y}\,dxdy$, onde $D = \{(x,y) : 1 \le y \le 2, y \le x \le y^3\}$.

   (d) $\int\int_D x\cos y\,dxdy$, onde $D$ é a região limitada por $y = 0$, $y = x^2$, $x = 1$.

   (e) $\int\int_D 4y^3\,dxdy$, onde $D$ é a região limitada por $y = x - 6$ e $y^2 = x$.

   (f) $\int\int_D xy\,dxdy$, onde $D$ é a região do primeiro quadrante limitada pela circunferência de centro $(0,0)$ e raio 1.

   (g) $\int\int_D (x^2\text{tg}\, x + y^3 + 4)\,dxdy$, onde $D = \{(x,y) : x^2 + y^2 \le 2\}$.

6. Determine o volume do sólido $S$ em cada um dos seguintes casos:

   (a) $S$ é limitado superiormente pelo parabolóide $z = x^2 + y^2$ e sua projeção no plano $xy$ é a região limitada por $y = x^2$ e $x = y^2$.

   (b) $S$ é limitado superiormente por $z = xy$ e sua projeção no plano $xy$ é o triângulo de vértices $(1,1)$, $(4,1)$ e $(1,2)$.

   (c) $S$ é a região do primeiro octante limitada pelo cilindro $x^2 + z^2 = 9$ e pelos planos $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ e $x + 2y = 2$.

   (d) $S$ é limitado pelos planos $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ e $x + y + z = 1$.

   (e) $S$ é a região do primeiro octante limitada pelo cilindro $x^2 + y^2 = 1$ e pelos planos $y = z$, $x = 0$ e $z = 0$.

   (f) $S$ é limitado pelos cilindros $x^2 + y^2 = r^2$ e $y^2 + z^2 = r^2$.

7. Escreva as duas integrais iteradas correspondentes à integral dupla

   $$\int\int_D f(x,y)\,dx\,dy,$$

   onde $D$ é a região do plano limitada pelas curvas $y = -x^2 + x + 2$ e $x - 2y + 1 = 0$.

8. Calcule as seguintes integrais, invertendo a ordem de integração:

   (a) $\int_0^1 \int_{3y}^3 e^{x^2}\, dx dy$ (b) $\int_0^3 \int_{y^2}^9 y\cos(x^2)\, dx dy$

   (c) $\int_0^1 \int_{\arcsin y}^{\pi/2} \cos x\sqrt{1+\cos^2 x}\, dx dy$.

9. Calcule as integrais:

   (a) $\int\int_R x\, dx dy$, onde $R$ é o disco de centro na origem e raio 5.

   (b) $\int\int_R xy\, dx dy$, onde $R$ é a região do primeiro quadrante limitada pelas circunferências $x^2 + y^2 = 4$ e $x^2 + y^2 = 25$.

   (c) $\int\int_R \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\, dx dy$, onde $R$ é a região interior à cardioide $r = 1 + \operatorname{sen}\theta$ e exterior à circunferência $r = 1$.

   (d) $\int\int_D (x^2 + y^2)\, dx dy$, onde $D$ é a região limitada pelas espirais $r = \theta$ e $r = 2\theta$, com $0 \le \theta \le 2\pi$.

10. Determine o volume da região interior à esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4a^2$ e exterior ao cilindro $x^2 + y^2 = 2ax$, com $a > 0$.

11. Determine a massa e o centro de massa da lâmina que ocupa a região $D$ e tem densidade $\rho$, nos seguintes casos:

    (a) $D = \{(x, y) : -1 \le x \le 1, 0 \le y \le 1\}$ e $\rho(x, y) = x^2$.

    (b) $D$ é o triângulo de vértices $(0,0)$, $(2,1)$, $(0,3)$ e $\rho(x, y) = x + y$.

    (c) $D$ é a região do primeiro quadrante limitada pela parábola $y = x^2$ e a reta $y = 1$ e $\rho(x, y) = xy$.

    (d) $D$ é a região limitada pela parábola $y^2 = x$ e a reta $y = x - 2$ e $\rho(x, y) = 3$.

    (e) $D = \{(x, y) : 0 \le y \le \operatorname{sen} x, 0 \le x \le \pi\}$ e $\rho(x, y) = y$.

12. Calcule as integrais triplas:

    (a) $\int\int\int_D yz\, dx dy dz$, onde $D = \{(x, y, z) : 0 \le z \le 1, 0 \le y \le 2z, 0 \le x \le z + 2\}$.

    (b) $\int\int\int_D y\, dx dy dz$, onde $D$ é a região abaixo do plano $z = x + 2y$ e acima da região no plano $xy$ limitada pelas curvas $y = x^2$, $y = 0$ e $x = 1$.

    (c) $\int\int\int_D xy\, dx dy dz$, onde $D$ é o tetraedro sólido com vértices $(0,0,0)$, $(1,0,0)$, $(0,2,0)$ e $(0,0,3)$.

    (d) $\int\int\int_D z\, dx dy dz$, onde $D$ é limitada pelos planos $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $y + z = 1$ e $x + z = 1$.

    (e) $\int\int\int_D x\, dx dy dz$, onde $D$ é limitada pelo parabolóide $x = 4y^2 + 4z^2$ e pelo plano $x = 4$.

13. Determine a massa e o centro de massa do cubo $Q = [0, a] \times [0, a] \times [0, a]$ cuja densidade é dada pela função $\rho(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$.

14. Calcule as seguintes integrais:

    (a) $\int\int\int_E (x^2 + y^2)\, dx dy dz$, onde $E$ é a região limitada pelo cilindro $x^2 + y^2 = 4$ e pelos planos $z = -1$ e $z = 2$.

    (b) $\int\int\int_E y\, dx dy dz$, onde $E$ é a região entre os cilindros $x^2 + y^2 = 4$ e $x^2 + y^2 = 1$, limitada pelo plano $xy$ e pelo plano $z = x + 2$.

    (c) $\int\int\int_E x^2\, dx dy dz$, onde $E$ é o sólido limitado pelo cilindro $x^2 + y^2 = 1$, acima do plano $z = 0$ e abaixo do cone $z^2 = 4x^2 + 4y^2$.

15. Determine o volume da região $R$ limitada pelos parabolóides $z = x^2 + y^2$ e $z = 36 - 3x^2 - 3y^2$.

16. Determine a massa e o centro de massa do sólido $S$ limitado pelo parabolóide $z = 4x^2 + 4y^2$ e pelo plano $z = a$ $(a > 0)$, se $S$ tem densidade constante $K$.

17. Calcule as integrais:

    (a) $\int\int\int_B (x^2 + y^2 + z^2)\, dxdydz$, onde $B$ é a bola unitária $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$.

    (b) $\int\int\int_E \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\, dxdydz$, onde $E$ é a região interior ao cone $\varphi = \pi/6$ e à esfera $\rho = 2$.

    (c) $\int\int\int_E x\, dxdydz$, onde $E$ é o conjunto $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + z^2 \leq 1$, $x \geq 0$.

18. Determine a massa de um hemisfério sólido $H$ de raio $a$ se a densidade em qualquer ponto é proporcional a sua distância ao centro da base.

19. a) Calcule o volume da região limitada pelo elipsóide $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.

    b) Calcule a massa do sólido $\xi = \{x^2 + y^2 + z^2 \leq r^2,\ z \geq a > 0\}$, $\delta(x, y, z) = z$.

20. Seja $f$ contínua em $[0, 1]$ e seja $R$ a região triangular com vértices $(0, 0)$, $(1, 0)$ e $(0, 1)$. Mostre que

$$\int\int_R f(x + y)\, dxdy = \int_0^1 u f(u)\, du.$$

21. Calcule $\int\int_D \frac{1}{(x^2+y^2)^{n/2}}\, dxdy$, onde $D$ é a região entre os círculos com centros na origem e raios $r$ e $R$, $0 < r < R$. Para que valores de $n$ a integral tem limite quando $r \to 0+$? E quando $R \to \infty$?

22. Faça uma análise semelhante para a integral tripla

$$\int\int\int_D \frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{n/2}}\, dxdy,$$

    onde $D$ é a região interior às esferas com centros na origem e raios $r$ e $R$, $0 < r < R$.

23. Use a transformação $x = u^2$, $y = v^2$, $z = w^2$ para calcular o volume da região limitada pela superfície $\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = 1$ e pelos planos coordenados.

### ✰ Integrais de linha

24. Calcule as seguintes integrais de linha ao longo da curva indicada:

    (a) $\int_\gamma x\, ds$, $\gamma(t) = (t^3, t)$, $0 \leq t \leq 1$.

    (b) $\int_\gamma xy^4\, ds$, $\gamma$ é a semi-circunferência $x^2 + y^2 = 16$, $x \geq 0$.

    (c) $\int_\gamma (x - 2y^2)\, dy$, $\gamma$ é o arco da parábola $y = x^2$ de $(-2, 4)$ a $(1, 1)$.

    (d) $\int_\gamma xy\, dx + (x - y)\, dy$, $\gamma$ consiste dos segmentos de reta de $(0, 0)$ a $(2, 0)$ e de $(2, 0)$ a $(3, 2)$.

    (e) $\int_\gamma xyz\, ds$, $\gamma : x = 2t$, $y = 3\,\mathrm{sen}\, t$, $z = 3\cos t$, $0 \leq t \leq \pi/2$.

    (f) $\int_\gamma xy^2 z\, ds$, $\gamma$ é o segmento de reta de $(1, 0, 1)$ a $(0, 3, 6)$.

    (g) $\int_\gamma x^3 y^2 z\, dz$, $\gamma$ é dada por $x = 2t$, $y = t^2$, $z = t^2$, $0 \leq t \leq 1$.

(h) $\int_\gamma z^2\,dx - z\,dy + 2y\,dz$, $\gamma$ consiste dos segmentos de reta de $(0,0,0)$ a $(0,1,1)$, de $(0,1,1)$ a $(1,2,3)$ e de $(1,2,3)$ a $(1,2,4)$.

25. Calcule $\int_\gamma \vec{F}\cdot d\vec{r}$, onde $\vec{F}(x,y,z) = (x^2+y)\vec{i} - 7yz\vec{j} + 2xz^2\vec{k}$ e $\gamma$ é a curva ligando o ponto $(0,0,0)$ a $(1,1,1)$ nos seguintes casos:

    (a) $\gamma(t) = (t, t^2, t^3)$;

    (b) $\gamma$ é composta dos segmentos de reta de $(0,0,0)$ a $(1,0,0)$, depois a $(1,1,0)$ e depois a $(1,1,1)$;

26. Calcule $\int_\gamma \vec{F}\cdot d\vec{r}$ para:

    (a) (a) $\vec{F}(x,y) = y\vec{i} + (x^2+y^2)\vec{j}$, onde $\gamma$ é o arco de circunferência $\gamma(x) = (x, \sqrt{4-x^2})$, ligando $(-2,0)$ a $(2,0)$;

    (b) (b) $\vec{F}(x,y) = 2(x+y)\vec{i} + (x-y)\vec{j}$, onde $\gamma$ é a elipse de equação $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, percorrida uma vez em sentido anti-horário.

27. Calcule:

    (a) $\int_\gamma x\,dx + (y+x)\,dy + z\,dz$, sendo $\gamma$ a intersecção das superfícies $z = x^2+y^2$ e $z = 2x+2y-1$, orientada de modo que sua projeção no plano $Oxy$ seja percorrida uma vez no sentido horário;

    (b) $\int_\gamma (2y+1)\,dx + z\,dy + x\,dz$, sendo $\gamma$ a intersecção das superfícies $x^2+4y^2 = 1$ e $x^2+z^2 = 1$, com $y \geq 0$, $z \geq 0$, percorrida uma vez do ponto $(1,0,0)$ ao ponto $(-1,0,0)$;

    (c) $\int_\gamma y\,dx + z\,dy + x\,dz$, sendo $\gamma$ a intersecção das superfícies $x+y = 2$ e $x^2+y^2+z^2 = 2(x+y)$, orientada de modo que sua projeção no plano $Oxz$ seja percorrida uma vez no sentido horário;

    (d) $\int_\gamma y\,dx + z\,dy + x\,dz$, sendo $\gamma$ a intersecção das superfícies $z = xy$ e $x^2+y^2 = 1$, orientada de modo que sua projeção no plano $Oxy$ seja percorrida uma vez no sentido horário;

    (e) $\int_\gamma x^2\,dx + x\,dy + z\,dz$, sendo $\gamma$ a intersecção das superfícies $z = \frac{x^2}{9}$ e $z = 1 - \frac{y^2}{4}$, orientada de modo que sua projeção no plano $Oxy$ seja percorrida uma vez no sentido anti-horário;

    (f) $\int_\gamma y^2\,dx + 3z\,dy$, sendo $\gamma$ a intersecção das superfícies $z = x^2+y^2$ e $z = 2x+4y$, orientada de modo que sua projeção no plano $Oxy$ seja percorrida uma vez no sentido anti-horário;

    (g) $\int_\gamma z\,dy - x\,dz$, sendo $\gamma$ a intersecção do elipsóide $\frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{6} = \frac{4}{3}$ com o plano $x+z = 2$, orientada de modo que sua projeção no plano $Oxy$ seja percorrida uma vez no sentido anti-horário.

28. Calcule:

    (a) $\int_\gamma 2x\,dx + (z^2-y^2)\,dz$, onde $\gamma$ é o arco circular dado por $x = 0$, $y^2+z^2 = 4$, de $(0,2,0)$ a $(0,0,2)$ $y \geq 0$;

    (b) $\int_\gamma \frac{(x+y)\,dx - (x-y)\,dy}{x^2+y^2}$, onde $\gamma$ é a circunferência $x^2+y^2 = a^2$, percorrida uma vez no sentido horário;

    (c) $\int_\gamma \sqrt{y}\,dx + \sqrt{x}\,dy$, sendo $\gamma$ a fronteira da região limitada por $x = 0$, $y = 1$ e $y = x^2$, percorrida uma vez no sentido horário;

29. Um cabo delgado é dobrado na forma de um semi-círculo $x^2 + y^2 = 4,\ x \geq 0$. Se a densidade linear é $x^2$, determine a massa e o centro de massa do cabo.

30. Determine o trabalho realizado pelo campo de forças $\vec{F}(x,y) = x\vec{i} + (y+2)\vec{j}$ ao mover um ponto ao longo da ciclóide $\vec{r}(t) = (t - \operatorname{sen} t)\vec{i} + (1 - \cos t)\vec{j}$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

31. Usando o Teorema de Green, calcule as seguintes integrais de linha:

    (a) $\oint_\gamma x^2 y\,dx + xy^3\,dy$, onde $\gamma$ é o quadrado com vértices $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,1)$ e $(0,1)$, orientado positivamente;

    (b) $\oint_\gamma (x+2y)\,dx + (x-2y)\,dy$, onde $\gamma$ consiste do arco da parábola $y = x^2$ de $(0,0)$ a $(1,1)$ e do segmento de reta de $(1,1)$ a $(0,0)$.

    (c) $\oint_\gamma (y + e^{\sqrt{x}})\,dx + (2x + \cos y^2)\,dy$, onde $\gamma$ é a fronteira da região limitada pelas parábolas $y = x^2$ e $x = y^2$ percorrida no sentido anti-horário.

    (d) $\oint_\gamma x^2\,dx + y^2\,dy$, $\gamma$ é a curva $x^6 + y^6 = 1$, sentido anti-horário.

    (e) $\oint_\gamma xy\,dx + (2x^2 + x)\,dy$, $\gamma$ consiste do segmento de reta unindo $(-2,0)$ a $(2,0)$ e da semi-circunferência $x^2 + y^2 = 4$, $y \geq 0$, orientada positivamente.

    (f) $\oint_\gamma 2xy\,dx + (x^2 + x)\,dy$, $\gamma$ é a cardióide $\rho = 1 + \cos\theta$ orientada positivamente.

    (g) $\oint_\gamma (xy + e^{x^2})\,dx + (x^2 - \ln(1+y))\,dy$, $\gamma$ consiste do segmento de reta de $(0,0)$ a $(\pi,0)$ e do arco da curva $y = \operatorname{sen} x$, orientada positivamente.

    (h) $\oint_\gamma \vec{F}\cdot d\vec{r}$, onde $\vec{F}(x,y) = (y^2 - x^2 y)\vec{i} + xy^2\vec{j}$ e $\gamma$ consiste do arco de circunferência $x^2 + y^2 = 4$ de $(2,0)$ a $(\sqrt{2},\sqrt{2})$, e dos segmentos de reta de $(\sqrt{2},\sqrt{2})$ a $(0,0)$ e de $(0,0)$ a $(2,0)$.

32. Seja $D$ uma região de $\mathbb{R}^2$ com $D$ e $\partial D$ satisfazendo as hipóteses do Teorema de Green. Mostre que a área de D coincide com a integral $\int_{\partial D} x\,dy = \int_{\partial D} -y\,dx$.

33. Usando o exercício anterior, calcule a área de:

    (a) $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1\}$;

    (b) $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^{2/3} + y^{2/3} \leq a^{2/3}\}$.

34. Determine a área da região limitada pela hipociclóide dada por $\vec{r}(t) = \cos^3 t\,\vec{i} + \operatorname{sen}^3 t\,\vec{j}$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

35. Neste exercício, vamos calcular a área de um polígono irregular.

    (a) Se $\gamma$ é o segmento de reta ligando o ponto $(x_1, y_1)$ ao ponto $(x_2, y_2)$, mostre que

    $$\int_\gamma x\,dy - y\,dx = x_1 y_2 - x_2 y_1.$$

    (b) Em ordem anti-horária, os vértices de um polígono são $(x_1,y_1)$, $(x_2,y_2)$, ..., $(x_N,y_N)$. Mostre que sua área é dada por

    $$A = \frac{1}{2}[(x_1 y_2 - x_2 y_1) + (x_2 y_3 - x_3 y_2) + \ldots + (x_{N-1} y_N - x_N y_{N-1}) + (x_N y_1 - x_1 y_N)].$$

(c) Determine a área do pentágono de vértices $(0,0)$, $(2,1)$, $(1,3)$, $(0,2)$ e $(-1,2)$.

36. Calcule

(a) $\int_\gamma x^2(5y\,dx + 7x\,dy) + e^y\,dy$, sendo $\gamma$ a elipse $16x^2 + 25y^2 = 100$, percorrida de $(0,-2)$ até $(0,2)$, $x > 0$.

(b) $\int_\gamma (2xe^y - x^2y - \frac{y^3}{3})\,dx + (x^2e^y + \operatorname{sen} y)\,dy$, sendo $\gamma$ a circunferência $x^2 + y^2 - 2x = 0$, percorrida de $(0,0)$ até $(2,0)$ com $y > 0$.

(c) $\int_\gamma \vec{v}\,d r$, sendo $\gamma$ a fronteira do retângulo $[1,2]\times[-1,1]$ e $\vec{v}(x,y) = 2\arctan\frac{y}{x}\vec{i} + [\ln(x^2+y^2) + 2x]\vec{j}$, percorrida no sentido anti-horário.

37. Calcule

(a) $\int_\gamma \frac{-y\,dx + x\,dy}{x^2+y^2}$ sendo $\gamma$ a curva fronteira da região determinada pelas curvas $y^2 = 2(x+2)$ e $x = 2$, orientada no sentido horário.

(b) $\int_\gamma \frac{x\,dx + y\,dy}{x^2+y^2}$ sendo $\gamma$ a curva $y = x^2 + 1$ $-1 \le x \le 2$, percorrida do ponto (-1,2) a (2,5).

(c) $\int_\gamma \frac{y\,dx - (x-1)\,dy}{(x-1)^2+y^2}$ sendo $\gamma$ a circunferência $x^2 + y^2 = 4$, percorrida no sentido horário.

(d) $\int_\gamma \frac{x^2y\,dx - x^3\,dy}{(x^2+y^2)^2}$ sendo $\gamma = \partial R$ onde $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \le 1, |y| \le 1\}$, orientada no sentido horário.

38. Verifique que a integral $\int_\gamma 2x \operatorname{sen} y\,dx + (x^2\cos y - 3y^2)\,dy$, onde $\gamma$ é uma curva ligando $(-1,0)$ a $(5,1)$, é independente do caminho e calcule o seu valor.

39. Seja $\gamma$ uma curva plana simples, fechada e lisa por partes percorrida uma vez no sentido horário. Encontre todos os valores possíveis para

(a) $\int_\gamma \frac{-y\,dx + x\,dy}{x^2+y^2}$

(b) $\int_\gamma \frac{-y\,dx + x\,dy}{4x^2+9y^2}$

40. Sejam as curvas $\gamma_1$ a circunferência $x^2 + y^2 = \frac{1}{16}$ percorrida no sentido anti-horário, $\gamma_2$ a circunferência $x^2 + y^2 = 4$, percorrida no sentido anti-horário e $\gamma_3$ a curva formada pela união das três seguintes circunferências: $(x-1)^2 + y^2 = \frac{1}{9}$ , $(x+1)^2 + y^2 = \frac{1}{9}$, ambas percorridas no sentido horário e $x^2 + y^2 = \frac{1}{9}$ percorrida no sentido anti-horário. Se $I_k = \int_{\gamma_k} P\,dx + Q\,dy$ onde $P(x,y) = -y\left[\frac{1}{(x-1)^2+y^2} + \frac{1}{x^2+y^2} + \frac{1}{(x+1)^2+y^2}\right]$ e $Q(x,y) = \frac{x-1}{(x-1)^2+y^2} + \frac{x}{x^2+y^2} + \frac{x+1}{(x+1)^2+y^2}$ então calcule $I_1$, $I_2$ e $I_3$.

41. Calcule $\int_\gamma F\,d\vec{r}$ onde $F = \left(\frac{-y}{x^2+\frac{y^2}{9}} + y, \frac{x}{x^2+\frac{y^2}{9}} + 3x\right)$ se

(a) $\gamma$ é a curva $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 4$, percorrida uma vez no sentido horário.

(b) $\gamma$ é a curva $(x-1)^2 + y^2 = 4$, percorrida uma vez no sentido horário.

42. Um campo de vetores $\vec{F}$ em $\mathbb{R}^2$ se diz *radial* (ou *central*) se existe uma função $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $\vec{F}(x,y) = g(|\vec{r}|)\vec{r}$, onde $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j}$. Suponha que $g$ é de classe $C^1$. Mostre que $\vec{F}$ é conservativo.

43. Determine todos os valores possíveis da integral

$$\int_{(1,0)}^{(2,2)} \frac{-y\,dx + x\,dy}{x^2+y^2}$$

sobre um caminho que não passe pela origem.

44. Em cada caso abaixo, determine se $\vec{F}$ é ou não campo gradiente no domínio indicado. Em caso afirmativo, determine o potencial de $\vec{F}$.

    (a) $\vec{F}(x,y) = x\vec{i} + x\vec{j}$ em $\mathbb{R}^2$
    (b) $\vec{F}(x,y) = (2xe^y + y)\vec{i} + (x^2e^y + x - 2y)\vec{j}$ em $\mathbb{R}^2$
    (c) $\vec{F}(x,y,z) = (2x^2 + 8xy^2)\vec{i} + (3x^3y - 3xy)\vec{j} + -(4z^2y^2 + 2x^3z)\vec{k}$ em $\mathbb{R}^3$
    (d) $\vec{F}(x,y,z) = (x+z)\vec{i} - (y+z)\vec{j} + (x-y)\vec{k}$ em $\mathbb{R}^3$
    (e) $\vec{F}(x,y,z) = (y^2\cos x + z^3)\vec{i} - (4 + 2y\,\mathrm{sen}x)\vec{j} + (3xz^2 + 2)\vec{k}$ em $\mathbb{R}^3$
    (f) $\vec{F}(x,y) = \frac{-y\vec{i}+x\vec{j}}{x^2+y^2}$, em $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$
    (g) $\vec{F}(x,y) = \frac{-y\vec{i}+x\vec{j}}{x^2+y^2}$, em $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0 \text{ se } y = 0\}$
    (h) $\vec{F}(x,y) = \frac{x\vec{i}+y\vec{j}}{x^2+y^2}$, em $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$

45. Seja o campo $\vec{F}(x,y) = \frac{x\vec{i}+y\vec{j}}{x^2+y^2}$ e $\gamma$ a curva dada por $\gamma(t) = (e^t,\ \mathrm{sen}t)$ para $0 \le t \le \pi$. Calcule $\int_\gamma \vec{F}d\vec{r}$.

46. Calcule as integrais:

    (a) (a) $\int_\gamma 7x^6y\,dx + x^7\,dy$ sendo $\gamma(t) = (t, e^{t^2-1})$, onde $t \in [0,1]$.
    (b) (b) $\int_\gamma [\ln(x+y^2) - y]\,dx + [2y\ln(x+y^2) - x]\,dy$ sendo $\gamma$ a curva $(x-2)^2 + y^2 = 1$ com $y \ge 0$ orientada no sentido horário.
    (c) (c) $\int_\gamma \frac{y\,dx - x\,dy}{x^2+y^2}$ sendo $\gamma$ a curva dada por $x(t) = \cos^3 t$ e $y(t) = \mathrm{sen}^3 t$ com $y \ge 0$ ligando os pontos $(1,0)$ e $(0,1)$, nessa ordem.

47. Mostre que as integrais abaixo independem do caminho e calcule-as.

    (a) (a) $\int_{(1,1)}^{(a,b)} 2xy\,dx + (x^2 - y^2)\,dy$.
    (b) (b) $\int_{(0,0)}^{(a,b)} \mathrm{sen}y\,dx + x\cos y\,dy$ .

48. Calcule

    (a) (a) $\int_{(1,1,2)}^{(3,5,0)} yz\,dx + xz\,dy + xy\,dz$.
    (b) (b) $\int_\gamma \mathrm{sen}\,(yz)\,dx + xz\cos(yz)\,dy + xy\cos(yz)\,dz$, sendo $\gamma(t) = (\cos t, \mathrm{sen}\,t, t)$ para $t \in [0, \frac{\pi}{4}]$ .

49. Calcule $\int_A^B \frac{x\,dx + y\,dy + z\,dz}{x^2+y^2+z^2}$, onde o ponto $A$ pertence à esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ e o ponto $B$ pertence a esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$.

50. Se $\vec{n}(x,y)$ é vetor unitário normal ao traço da curva $\gamma$ em $(x,y)$, calcule $\int_\gamma \vec{F}\cdot\vec{n}\,ds$ sendo

(a) (a) $\vec{F}(x,y) = x^{10}\vec{i} + (3x - 10x^9 y)\vec{j}$ e $\gamma$ a parte da circunferência $x^2+y^2=1$ contida no primeiro quadrante, $n$ normal exterior à circunferência

(b) (b) $\vec{F}(x,y) = x^3y^3\vec{i} - \frac{3x^2y^4+2}{4}\vec{j}$ e $\gamma(t) = (t^3,\ \operatorname{sen}(4\arctan t^2))$, $t\in[0,1]$, $n\cdot\vec{j}\le 0$.

☆ **Respostas**

**(1)** (a) $-\frac{585}{8}$ , (b) $\frac{15}{4}(2-\sqrt{3})$ , (c) $\ln\frac{27}{16}$; **(2)** $\frac{4}{15}(2\sqrt{2}-1)$; **(3)** 36; **(4)** $-1/2$ e $1/2$; **(5)** (a) $\frac{1}{12}$, (b) $-\frac{19}{42}$, (c) $\frac{1}{2}e^4-2e$, (d) $(1-\cos 1)/2$, (e) $\frac{500}{3}$, (f) $\frac{1}{8}$, (g) $8\pi$; **(6)** (a) $\frac{6}{35}$, (b) $\frac{31}{8}$, (c) $\frac{1}{6}(11\sqrt{5}-27)+\frac{9}{2}arcsen\frac{2}{3}$, (d) $\frac{1}{6}$, (e) $\frac{1}{3}$, (f) $\frac{16}{3}r^3$; **(8)** (a) $(e^9-1)/6$, (b) $\frac{1}{4}\operatorname{sen}81$, (c) $(2\sqrt{2}-1)/3$; **(9)** (a) 0, (b) $\frac{609}{8}$, (c) 2, (d) $24\pi^5$; **(11)** (a) $\frac{2}{3}$, $(0,\frac{1}{2})$, (b) 6, $(\frac{3}{4},\frac{3}{2})$, (c) $\frac{1}{6}$, $(\frac{4}{7},\frac{3}{4})$, (d) $\frac{27}{2}$, $(\frac{8}{5},\frac{1}{2})$ (e) $\frac{\pi}{4}$, $(\frac{\pi}{2},\frac{16}{9\pi})$; **(12)** (a) $\frac{7}{5}$, (b) $\frac{5}{28}$, (c) $\frac{1}{10}$, (d) $\frac{1}{12}$, (e) $\frac{16\pi}{3}$; **(13)** $a^5$, $(7a/12, 7a/12, 7a/12)$; **(14)** (a) $24\pi$, (b) 0, (c) $2\pi/5$; **(15)** $162\pi$; **(16)** $\pi K a^2/8$, $(0,0,2a/3)$; **(17)** (a) $4\pi/5$, (b) $4\pi(2-\sqrt{3})$, (c) $\frac{3\pi}{2}$; **(18)** $K\pi a^4/2$, onde $K$ é a constante de proporcionalidade; **(19)** (a) $\frac{4}{3}\pi abc$; (b) $\frac{\pi}{4}(r^2-a^2)^2$;

**(24)** (a) $(10\sqrt{10}-1)/54$, (b) 1638,4, (c) 48, (d) $\frac{17}{3}$, (e) $9\sqrt{13}\pi/4$, (f) $3\sqrt{35}$, (g) $\frac{16}{11}$, (h) $\frac{77}{6}$; **(25)** (a) $-\frac{11}{15}$ , (b) 1; **(26)** (a) $2\pi$, (b) $\pi ab$; **(27) (a)** $-\pi$, **(b)** $-2$, **(c)** $-2\pi\sqrt{2}$, **(d)** $\pi$, **(e)** $6\pi$, **(f)**$10\pi$, **(g)** $R=-2\pi\sqrt{3}$; **(28) (a)** $-\frac{8}{3}$**; b)** $2\pi$**; c)** $-3/10$**; (29)** $4\pi, (\frac{16}{3\pi}, 0)$**; (30)** $2\pi^2$**; (31) (a)** $-1/12$, **(b)** $-1/6$, **(c)** $1/3$, **(d)** 0, **(e)** $2\pi$, **(f)** $\frac{3\pi}{2}$ , **(g)** $\pi$, **(h)** $\pi+\frac{16}{3}[\frac{1}{\sqrt{2}}-1]$**; (34)** $3\pi/8$**; (35)** (c) $\frac{9}{2}$; **(36)** (a) $e^{-2}-e^2+\frac{125}{2}\pi$; (b) $4-\frac{3\pi}{4}$; (c) 4; **(37)** (a) $-2\pi$; (b) $\frac{1}{2}\ln\frac{29}{5}$; (c) $2\pi$; (d) $\pi$; **(38)** $25\operatorname{sen}1-1$; **(39)** (a) 0 ou $-2\pi$; b) 0 ou $-\frac{\pi}{3}$; **(40)** $I_1=2\pi$; $I_2=6\pi$; $I_3=-2\pi$; **(41)** (a) $-8\pi$; (b) $-14\pi$; **(43)** $2k\pi$, com $k$ inteiro; **(44)** (a) não; (b) $\varphi = x^2e^y+xy-y^2+c$; (c) não; (d) $\varphi=\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{2}+zx-zy+c$; (e) $\varphi=y^2\operatorname{sen}x+xz^3-4y+2z+c$; (f) não; (g) $\varphi=\arctan(y/x)$; (h) $\varphi=\frac{\ln(x^2+y^2)}{2}+c$; **(45)** $\pi$; **(46)** (a) 1, (b) $3\ln 3-2$, (c) $\frac{-\pi}{2}$; **(47)** (a) $a^2b-\frac{b^3}{3}-\frac{2}{3}$; (b) $a\operatorname{sen}b$; **(48)** (a) $-2$, (b) $\frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{2}\pi}{8}\right)$; **(49)** $\ln 2$; **(50)** (a) $-\frac{1}{11}$; (b) $\frac{1}{2}$.

**Parte 4**

## ✰ Superfícies parametrizadas

1. Determine uma representação paramétrica de cada uma das superfícies descritas abaixo e calcule sua área:

   (a) $S$ é a parte da esfera $x^2+y^2+z^2=4$ interior ao cone $z \geq \sqrt{x^2+y^2}$;

   (b) $S$ é a parte do cilindro $x^2+z^2=1$ compreendida entre os planos $y=-1$ e $y=3$;

   (c) $S$ é a parte do plano $z=2x+3y$ que é interior ao cilindro $x^2+y^2=16$;

   (d) $S$ é a parte do parabolóide hiperbólico $z=y^2-x^2$ que está entre os cilindros $x^2+y^2=1$ e $x^2+y^2=4$;

   (e) $S$ é a parte do cilindro $x^2+z^2=a^2$ que está no interior do cilindro $x^2+y^2=a^2$, onde $a>0$;

   (f) $S$ é a parte da esfera $x^2+y^2+z^2=a^2$ que está no interior do cilindro $x^2+y^2=ax$, onde $a>0$;

   (g) $S$ é o toro obtido pela rotação da circunferência no plano $xz$ com centro $(b,0,0)$ e raio $a<b$ em torno do eixo $z$;

   (h) $S$ é a parte da esfera $x^2+y^2+z^2=4$ com $z \geq \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{3}}$.

   Resp.: (a) $4\pi(2-\sqrt{2})$, (b) $8\pi$, (c) $16\pi\sqrt{14}$, (d) $\frac{\pi}{6}(17\sqrt{17}-5\sqrt{5})$, (e) $8a^2$, (f) $2a^2(\pi-2)$, (g) $4ab\pi^2$, (h) $4\pi$.

2. Sejam $0<a<b$ e $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ uma função positiva com derivada contínua. Determine equações paramétricas das superfícies geradas pela rotação da curva $y=f(x)$ em torno do eixo $x$ e do eixo $y$. Calcule a área da superfície em cada caso.

   Resp.: (a) $2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+f'(x)^2}\,dx$, (b) $2\pi\int_a^b x\sqrt{1+f'(x)^2}\,dx$.

## ✰ Integrais de superfície

3. Calcule as seguintes integrais de superfície:

   (a) $\iint_S y\,d\sigma$, onde $S$ é a superfície dada por $z=x+y^2$, $0\leq x\leq 1$, $0\leq y\leq 2$;

   (b) $\iint_S x^2\,d\sigma$, onde $S$ é a esfera $x^2+y^2+z^2=1$;

   (c) $\iint_S y\,d\sigma$, onde $S$ é a parte do plano $3x+2y+z=6$, que está contido no primeiro octante;

   (d) $\iint_S xz\,d\sigma$, onde $S$ é o triângulo com vértices (1,0,0), (1,1,1) e (0,0,2);

   (e) $\iint_S (x^2+y^2)\,d\sigma$, onde $S$ é a parte do parabolóide $x=4-y^2-z^2$ contida no semi-espaço $x\geq 0$;

   (f) $\iint_S yz\,d\sigma$, onde $S$ é a parte do plano $z=y+3$ limitada pelo cilindro $x^2+y^2=1$;

   (g) $\iint_S xy\,d\sigma$, onde $S$ é a fronteira da região limitada pelo cilindro $x^2+z^2=1$ e pelos planos $y=0$ e $x+y=2$;

   (h) $\iint_S z(x^2+y^2)\,d\sigma$, onde $S$ é o hemisfério $x^2+y^2+z^2=4$, $z\geq 0$;

(i) $\iint_S xyz\,d\sigma$, onde $S$ é a parte da esfera $x^2+y^2+z^2=1$ interior ao cone $z=\sqrt{x^2+y^2}$;

(j) $\iint_S \sqrt{\frac{2x^2+2y^2-2}{2x^2+2y^2-1}}\,d\sigma$, onde $S$ é a parte de $x^2+y^2-z^2=1$ com $1\le z\le 3$;

(k) $\iint_S (x+1)\,d\sigma$, onde $S$ é a parte de $z=\sqrt{x^2+y^2}$ limitada por $x^2+y^2=2y$.

Resp.: (a) $13\sqrt{2}/3$, (b) $4\pi/3$, (c) $3\sqrt{14}$, (d) $7\sqrt{6}/24$, (e) $\frac{\pi}{840}(12563\sqrt{17}-2347)$, (f) $\pi\sqrt{2}/4$, (g) $\frac{-\pi}{4}(8+\sqrt{2})$, (h) $16\pi$, (i) 0, (j) $8\pi\sqrt{2}$, (k) $\pi\sqrt{2}$.

4. Calcule a integral de superfície $\iint_S \vec{F}\cdot\vec{N}\,d\sigma$ para cada um dos campos de vetores $\vec{F}$ e superfícies orientadas $S$ indicadas abaixo. Em outras palavras, calcule o fluxo de $\vec{F}$ através de $S$. Quando $S$ é uma superfície fechada, admita que $S$ está orientada pela normal *exterior*.

   (a) $\vec{F}(x,y,z)=x^2y\vec{i}-3xy^2\vec{j}+4y^3\vec{k}$ e $S$ é a parte do parabolóide $z=9-x^2-y^2$, com $z\ge 0$, orientada de modo que a normal no ponto (0,0,9) é $\vec{k}$;

   (b) $\vec{F}(x,y,z)=x\vec{i}+xy\vec{j}+xz\vec{k}$ e $S$ é a parte do plano $3x+2y+z=6$, interior ao cilindro $x^2+y^2=1$, orientada de modo que seu vetor normal é $\frac{1}{\sqrt{14}}(3\vec{i}+2\vec{j}+\vec{k})$;

   (c) $\vec{F}(x,y,z)=-x\vec{i}-y\vec{j}+z^2\vec{k}$ e $S$ é a parte do cone $z=\sqrt{x^2+y^2}$, entre os planos $z=1$ e $z=2$, orientada de modo que sua normal $\vec{N}$ satisfaz $\vec{N}\cdot\vec{k}<0$;

   (d) $\vec{F}(x,y,z)=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$ e $S$ é a esfera $x^2+y^2+z^2=9$;

   (e) $\vec{F}(x,y,z)=-y\vec{i}+x\vec{j}+3z\vec{k}$ e $S$ é o hemisfério $z=\sqrt{16-x^2-y^2}$, orientada de modo que a normal no ponto (0,0,4) é $\vec{k}$;

   (f) $\vec{F}(x,y,z)=y\vec{i}-z\vec{k}$ e $S$ consiste do parabolóide $y=x^2+z^2$, $0\le y\le 1$ e do disco $x^2+z^2\le 1$, $y=1$, orientada para fora;

   (g) $\vec{F}(x,y,z)=x\vec{i}+2y\vec{j}+3z\vec{k}$ e $S$ é o cubo de vértices $(\pm1,\pm1,\pm1)$;

   (h) $\vec{F}(x,y,z)=(x+y)\vec{i}-(2y+1)\vec{j}+z\vec{k}$ e $S$ é o retângulo de vértices (1,0,1), (1,0,0), (0,1,0) e (0,1,1), orientado de modo que sua normal $\vec{N}$ satisfaz $\vec{N}\cdot\vec{j}>0$;

   (i) $\vec{F}(x,y,z)=-yz\vec{i}$ e $S$ é o a parte da esfera $x^2+y^2+z^2=4$ exterior ao cilindro $x^2+y^2\le 1$, orientado de modo que a normal no ponto (2,0,0) é $\vec{i}$;

   (j) $\vec{F}(x,y,z)=y\vec{i}+z\vec{j}+x\vec{k}$ e $S$ é a parte da superfície $z=\sqrt{4-x}$, limitada pela superfície cilíndrica $y^2=x$, orientado de modo que sua normal $\vec{N}$ satisfaz $\vec{N}\cdot\vec{i}>0$;

   (k) $\vec{F}(x,y,z)=x\vec{i}+y\vec{j}-2z\vec{k}$ e $S$ é a parte do cone $z=\sqrt{x^2+y^2}$, limitada pelo cilindro $x^2+y^2=2x$, orientada de modo que sua normal $\vec{N}$ satisfaz $\vec{N}\cdot\vec{k}<0$;

   Resp.: (a) 0, (b) $-3\pi/4$, (c) $-73\pi/6$, (d) $108\pi$, (e) $128\pi$, (f) $-\pi/2$, (g) 48, (h) -1, (i) 0, (j) $128/5$, (k) $32/3$.

5. Calcule:

   (a) $\iint_S xz\,dy\wedge dz+yz\,dz\wedge dx+x^2\,dx\wedge dy$, onde $S$ é a semi-esfera $x^2+y^2+z^2=a^2$ $(a>0)$, $z\ge 0$, orientada segundo a normal exterior;

   (b) $\iint_S x\,dy\wedge dz+y\,dz\wedge dx+z\,dx\wedge dy$, onde $S$ é a parte normal do plano $x+y+z=2$, no primeiro octante, orientada de modo que sua normal satisfaz $\vec{N}\cdot\vec{j}>0$;

   (c) $\iint_S x\,dy\wedge dz+y\,dz\wedge dx+z\,dx\wedge dy$, onde $S$ é a parte do parabolóide $z=4-x^2-y^2$, contida no semiespaço $z\ge 2y+1$, orientada de modo que sua normal satisfaz $\vec{N}\cdot\vec{k}\ge 0$.

Resp.: (a) $3\pi a^4/4$; b) 4; c) $28\pi$.

6. Suponha que a superfície $S$ seja o gráfico de uma função $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $C^1$, orientada de modo que sua normal unitária $\vec{N}$ tenha terceira componente não negativa. Se $\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$ é um campo de vetores sobre $S$, mostre que

$$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{N} d\sigma = \iint_D \left( -P\frac{\partial f}{\partial x} - Q\frac{\partial f}{\partial y} + R \right) dxdy.$$

7. Use o teorema de Stokes para calcular $\int_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{r}$ em cada um dos seguintes casos:

   (a) $\vec{F}(x,y,z) = xz\vec{i} + 2xy\vec{j} + 3xy\vec{k}$ e $\gamma$ é a fronteira da parte do plano $3x + y + z = 3$ contida no primeiro octante, orientada de modo que sua projeção no plano $xy$ seja percorrida no sentido anti-horário;

   (b) $\vec{F}(x,y,z) = (z^2 + e^{x^2})\vec{i} + (y^2 + \ln(1+y^2))\vec{j} + (xy + \operatorname{sen} z^3)\vec{k}$ e $\gamma$ é a fronteira do triângulo com vértices (1,0,0), (0,1,0) e (0,0,2), orientada de modo que sua projeção no plano $xy$ seja percorrida no sentido anti-horário;

   (c) $\vec{F}(x,y,z) = (2z + \operatorname{sen}(e^{x^3}))\vec{i} + 4x\vec{j} + (5y + \operatorname{sen}(\operatorname{sen} z^2))\vec{k}$ e $\gamma$ é a intersecção do plano $z = x + 4$ com o cilindro $x^2 + y^2 = 4$, orientada de modo que sua projeção no plano $xy$ seja percorrida no sentido anti-horário;

   (d) $\vec{F}(x,y,z) = (x + \cos x^3)\vec{i} + y\vec{j} + (x^2 - y^2 + z^{100})\vec{k}$ e $\gamma$ é a fronteira da parte do parabolóide $z = 1 - x^2 - y^2$ contida no primeiro octante, orientada de modo que sua projeção no plano $xy$ seja percorrida no sentido anti-horário;

   (e) $\vec{F}(x,y,z) = (y+z)\vec{i} + (2x + (1+y^2)^{20})\vec{j} + (x+y+z)\vec{k}$ e $\gamma$ é a intersecção do cilindro $x^2 + y^2 = 2y$ com o plano $z = y$, orientada de modo que sua projeção no plano $xy$ seja percorrida no sentido anti-horário;

   (f) $\vec{F}(x,y,z) = (y + \cos(\cos x))\vec{i} + (z + \operatorname{sen}(\cos y))\vec{j} + x\vec{k}$ e $\gamma$ é a intersecção da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ ($a > 0$) com o plano $x + y + z = 0$, orientada de modo que sua projeção no plano $xy$ seja percorrida no sentido anti-horário.

Resp.: (a) 7/2, (b) 4/3, (c) $-4\pi$, (d) $-1$, (e) $\pi$, (f) $-a^2\pi\sqrt{3}$.

8. Neste exercício, vamos calcular a área de um polígono irregular.

   (a) Se $\gamma$ é o segmento de reta ligando o ponto $(x_1, y_1)$ ao ponto $(x_2, y_2)$, mostre que

$$\frac{1}{2}\int_\gamma x\,dy - y\,dx = x_1 y_2 - x_2 y_1\,.$$

   (b) Em ordem anti-horária, os vértices de um polígono são $(x_1, y_1)$, $(x_2, y_2)$, ..., $(x_N, y_N)$. Mostre que sua área é dada por

$$A = \frac{1}{2}[(x_1 y_2 - x_2 y_1) + (x_2 y_3 - x_3 y_2) + \ldots + (x_{N-1} y_N - x_N y_{N-1}) + (x_N y_1 - x_1 y_N)].$$

   (c) Determine a área do pentágono de vértices $(0,0)$, $(2,1)$, $(1,3)$, $(0,2)$ e $(-1,2)$.

9. Calcule $\iint_S y^2z^2 dy\wedge dz + xdz\wedge dx + ydx\wedge dy$, onde $S$ é a parte da superfície $z^2 = x^2+2y^2$ entre os planos $z = 1$ e $z = y+3$, orientada com $\vec{N}$ tal que $\vec{N}\cdot\vec{k} < 0$.

   Resp.: $-54\pi$.

10. Calcule $\iint_S e^{z^2}\ln(z+y)dy\wedge dz + (x^2+z^2)dz\wedge dx + zdx\wedge dy$, onde $S$ é a parte do parabolóide $z = 4-x^2-y^2$ limitada pelo plano $z = y+4$, orientada com $\vec{N}$ tal que $\vec{N}\cdot\vec{k} \geq 0$. Resp.: $-\frac{35\pi}{16}$.

11. Calcule $\int_\gamma \vec{v}\cdot d\vec{r}$, sendo:

   (a) $\vec{v} = (yz+\cos(\operatorname{sen} x), xz+\ln(1+y^4), zy)$ e $\gamma$ é a intersecção das superfícies $x^2+y^2 = 4$ e $z = 2x+3$, orientada de modo que sua projeção no plano $xy$ seja percorrida no sentido anti-horário;

   (b) $\vec{v} = (\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}, \frac{z^3}{1+z^2}) + (\operatorname{sen}(\ln(1+x^4)), e^{y^3}, z^2)$ e $\gamma$ é a intersecção do cilindro $x^2+y^2 = 1$ com o plano $x+y+z = 4$, orientada de modo que sua projeção no plano $xy$ seja percorrida no sentido horário;

   (c) $\vec{v} = (2xz^3, x^2y^2, 3x^2z^2) + (y, 0, 0)$ e $\gamma$ é a intersecção das superfícies $z = \operatorname{sen} y + 10$ e $x^2 + y^2 = 16$, orientada de modo que sua projeção no plano $xy$ seja percorrida no sentido anti-horário;

   (d) $\vec{v} = (x-y^2, x-z+\frac{y^2}{2+\operatorname{sen} y}, y)$ e $\gamma$ é a intersecção do parabóide $4z = x^2+y^2$ com o cilindro $x^2+y^2 = 4$, orientada de modo que sua projeção no plano $xy$ seja percorrida no sentido anti-horário;

   (e) $\vec{v} = (e^x\operatorname{sen} y, e^x\cos y - z, y)$ e $\gamma$ é o bordo da superfície obtida pela rotação em torno do eixo $Oz$ do gráfico de $z = \frac{1}{y^2}$, $e \leq y \leq e^2$. Escolha uma orientação para $\gamma$.

   (f) $\vec{v} = (\operatorname{sen}(\ln(1+x^2)), \frac{-z}{y^2+z^2} + e^{y^4}, \frac{y}{y^2+z^2} + \cos z^{40})$ sendo $\gamma$ dado pela interseção do cilindro $y^2+z^2 = 4$ com o plano $x = y+z$. $\gamma$ é percorrido uma vez no sentido anti-horário.

   Resp.: (a) $-24\pi$, (b) $-2\pi$, (c) $-16\pi$, (d) $4\pi$, (e) 0, (f) $2\pi$.

12. Calcule $\int_\gamma (z+y^2)dx + (y^2+1)dy + [\ln(z^2+1)+y]dz$, sendo $\gamma(t) = (2\cos t, 2\operatorname{sen} t, 10-2\operatorname{sen} t)$, $t \in [0, 2\pi]$. Resp.: $4\pi$.

13. Seja $\gamma$ uma curva simples, fechada e plana e seja $\vec{N} = (a, b, c)$ um vetor unitário normal ao plano que contém $\gamma$. Mostre que a área da região limitada por $\gamma$ é dada por

$$\frac{1}{2}\int_\gamma (bz-cy)dx + (cx-az)dy + (ay-bx)dz,$$

   com $\gamma$ orientada pela orientação induzida de $\vec{N}$.

14. Calcule $\iint_S \vec{v}\cdot\vec{N}d\sigma$, onde $\vec{v} = (x^2+ye^z, y^2+ze^x, z^2+xe^y)$ e $S$ é a fronteira da região limitada pelo cilindro $x^2+y^2 = 1$ entre os planos $z = 0$ e $z = x+2$, orientada pela normal exterior.

   Resp.: $19\pi/4$.

15. Calcule $\iint_S dy \wedge dz + y^3 dz \wedge dx + z^2 dx \wedge dy$, onde $S$ está orientada pela normal exterior nos seguintes casos:

   (a) $S$ é a esfera $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$.

   (b) $S$ é a fronteira da região limitada por $z = 4$ e $z = x^2 + y^2$.

   Resp.: (a) $\frac{4\pi}{5} r^3$, (b) $176\frac{\pi}{3}$.

16. Seja $\vec{v} = \frac{\vec{r}}{|r|^3}$, onde $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$. Calcule $\iint_S \vec{v} \cdot N d\sigma$, onde $\vec{N}$ é a normal unitária exterior a $S$ nos seguintes casos:

   (a) $S$ é a esfera de raio $a > 0$ com centro na origem;

   (b) $S$ é uma superfície fechada lisa por partes tal que a origem não pertence a $S$ nem à região interior a $S$;

   (c) $S$ é uma superfície fechada lisa por partes que contém a origem em seu interior.

   Resp.: (a) $4\pi$, (b) 0, (c) $4\pi$

17. Seja $S$ uma superfície fechada lisa por partes e orientada pela normal exterior $\vec{N}$. Verifique as seguintes igualdades:

   (a) volume de $S = \frac{1}{3} \iint_S x dy \wedge dz + y dz \wedge dx + z dx \wedge dy$

   (b) $\iint_S \operatorname{rot} \vec{v} \cdot \vec{N} d\sigma = 0$, para qualquer campo $\vec{v}$ de classe $C^2$ em $\operatorname{Int}(S)$ cujo domínio contenha $S$.

18. Calcule $\iint_S (\operatorname{rot} \vec{F}) \cdot \vec{N} dS$ sendo:

   (a) $\vec{F}(x, y, z) = y\vec{i} + z\vec{j} + x\vec{k}$ e $S$ a parte do parabolóide $z = 9 - x^2 - y^2$ que está acima do plano $z = 5$, orientada pelo campo de vetores normais que aponta para cima;

   (b) $\vec{F}(x, y, z) = (xz,\ x - y,\ x^2 y)$ e $S$ formada pelas 3 faces, que não estão no plano $xy$, do tetraedro formado pelos planos coordenados e o plano $3x + y + 3z = 6$, sendo $\vec{N}$ o campo normal exterior ao tetraedro;

   (c) $\vec{F}(x, y, z) = (x^2,\ z,\ yz)$ e $S$ a parte do hiperbolóide $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ limitada por $x^2 + y^2 = 4$ com normal que aponta para o eixo $z$.

   Resp.: (a) $4\pi$, (b) 6, (c) 0

19. Admitindo que $S$ esteja orientada pela normal exterior $\vec{N}$, calcule o fluxo de $\vec{F}$ através de $S$ nos seguintes casos:

   (a) $\vec{F}(x, y, z) = 3y^2 z^3 \vec{i} + 9x^2 y z^2 \vec{j} - 4xy^2 \vec{k}$ e $S$ a superfície do cubo com vértices $(\pm 1, \pm 1, \pm 1)$;

   (b) $\vec{F}(x, y, z) = (-xzi + (y^3 - yz)j + z^2 k)$ e $S$ o elipsóide $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$;

   (c) $\vec{F}(x, y, z) = (x^3 + y \operatorname{sen} z, y^3 + z \operatorname{sen} x, 3z)$ e $S$ a superfície do sólido limitado pelos hemisférios $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2},\ z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ e pelo plano $z = 0$.

Resp.: (a) 8, (b) $\frac{4}{5}\pi ab^3c$, (c) $\frac{194\pi}{5}$.

20. Calcule as seguintes integrais:

    (a) $\iint_S x\,dy\wedge dz + yze^{z^2}dz\wedge dx - \frac{e^{z^2}}{2}dx\wedge dy$, onde $S$ é a parte de $z = x^2+y^2$ limitada por $x^2+y^2=1$, orientada com a normal unitária $\vec{N}$ tal que $\vec{N}\cdot\vec{k}>0$;

    (b) $\iint_S (x^2+z^3)dy\wedge dz + z^5 dz\wedge dx + (e^{x^2+y^2}+z^2)dx\wedge dy$, onde $S$ é a parte de $x^2+y^2+(z-1)^2=1$ interior a $z^2=x^2+y^2$, orientada com a normal exterior;

    (c) $\iint_S \vec{F}\cdot\vec{N}d\sigma$, onde $\vec{F}(x,y,z) = e^{z^2}\cos(zy^2)\vec{i} + x\vec{j} + y\vec{k}$ e $S$ é a parte de $x^2+y^2=1$ limitada por $z=0$ e $z=y+3$, orientada com a normal unitária exterior.

    Resp.: (a) $-\frac{\pi}{2}(e+1)$, (b) $\pi(e+11/6)$, (c) 0

21. Calcule as seguintes integrais:

    (a) $\iint_S \frac{x\,dy\wedge dz + y\,dz\wedge dx + z\,dx\wedge dy}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$, onde $S$ é a parte do elipsóide $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{16}=1, z\geq 0$, orientada com a normal unitária exterior;

    (b) $\iint_S \vec{F}\cdot\vec{N}d\sigma$, onde $\vec{F}(x,y,z) = \frac{x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} + z\vec{k}$ e $S$ é a parte de $x^2+y^2-2z^2=1$ com $0\leq z\leq 1$, orientada com a normal unitária $\vec{N}$ tal que $\vec{N}\cdot\vec{k}\leq 0$.

    Resp.: (a) $2\pi$, (b) $-\frac{\pi}{3}$.

22. Em cada caso abaixo, determine se $\vec{F}$ é ou não campo gradiente no domínio indicado. Em caso afirmativo, determine um potencial para $\vec{F}$.

    (a) $\vec{F}(x,y,z) = (2x^2+8xy^2)\vec{i} + (3x^3y-3xy)\vec{j} + -(4z^2y^2+2x^3z)\vec{k}$ em $\mathbb{R}^3$

    (b) $\vec{F}(x,y,z) = (x+z)\vec{i} - (y+z)\vec{j} + (x-y)\vec{k}$ em $\mathbb{R}^3$

    (c) $\vec{F}(x,y,z) = (y^2\cos x + z^3)\vec{i} + (4+2y\,\text{sen}\,x)\vec{j} + (3xz^2+2)\vec{k}$ em $\mathbb{R}^3$

    (d) $\vec{F}(x,y,z) = (yz)\vec{i} + (xz)\vec{j} + (xy)\vec{k}$ em $\mathbb{R}^3$

    (e) $\vec{F}(x,y,z) = (xy)\vec{i} + (y^2)\vec{j} + (xyz)\vec{k}$ em $\mathbb{R}^3$

    (f) $\vec{F}(x,y,z) = \left(\frac{x}{x^2+y^2+z^2}, \frac{y}{x^2+y^2+z^2}, \frac{z}{x^2+y^2+z^2}\right)$ em $\mathbb{R}^3 - \{(0,0)\}$

    (g) $\vec{F}(x,y,z) = \left(\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}, \frac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}, \frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\right)$ em $\mathbb{R}^3 - \{(0,0)\}$

    Resp. (a) Não; (b) Sim, $f(x,y,z) = \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2} + zx - zy$; (c) Sim, $f(x,y,z) = y^2\text{sen}\,x + xz^3 + 4y + 2z$; (d) Sim, $f(x,y,z) = xyz$; (e) Não; (f) Sim, $f(x,y,z) = \ln(\sqrt{x^2+y^2+z^2})$; (g) Sim, $f(x,y,z) = (x^2+y^2+z^2)^{-1/2}$