UFPR - Universidade Federal do Paraná
Departamento de Matemática
CM042 - Cálculo II
Prof. José Carlos Eidam

Lista 1

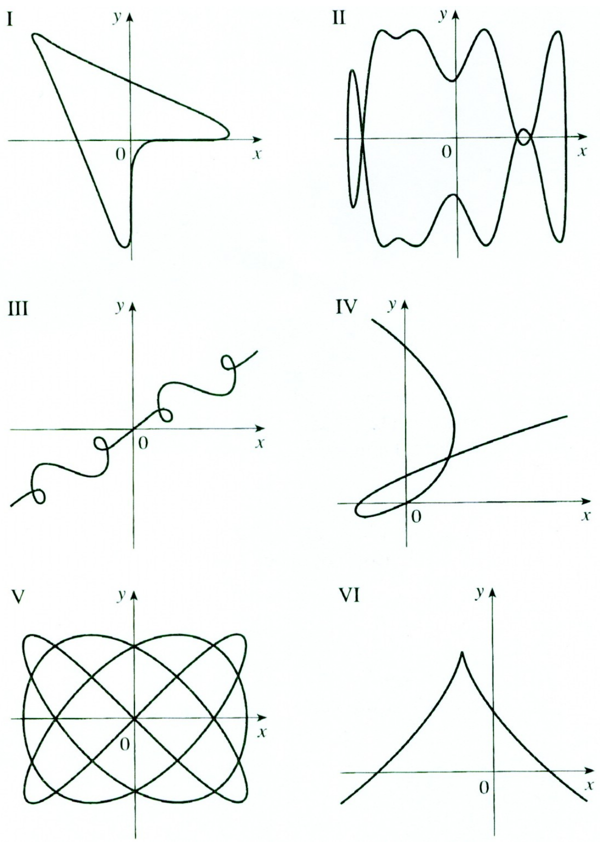
✰ Curvas

1. Desenhe as imagens das seguintes curvas:

   (a) $\gamma(t) = (1, t)$
   (b) $\gamma(t) = (\cos^2 t, \text{sen}\, t)$, $0 \le t \le 2\pi$
   (c) $\gamma(t) = (\text{sen}\, t, \text{sen}^2 t)$
   (d) $\gamma(t) = (2 + \cos t, 3 + 4\text{sen}\, t)$
   (e) $\gamma(t) = (\frac{1}{2}, 1 - t)$
   (f) $\gamma(t) = (e^t \cos t, e^t \,\text{sen}\, t)$, $t \ge 0$
   (g) $\gamma(t) = (\sec t, \tan t)$, $-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$
   (h) $\gamma(t) = (\sqrt{2}\cos t, 2\text{sen}\, t)$
   (i) $\gamma(t) = (\ln t, \sqrt{t})$, $t \ge 1$
   (j) $\gamma(t) = (\cosh t, \sinh t)$, $t \in \mathbb{R}$
   (k) $\gamma(t) = (1 + \cos t, 2\cos t - 1)$, $0 \le t \le 2\pi$
   (l) $\gamma(t) = (1 - t^2, 2t^3 + 1)$, $t \in \mathbb{R}$
   (m) $\gamma(t) = (t(t^2 - 3), 3(t^2 - 3))$
   (n) $\gamma(t) = (t^3 - 3t^2, t^3 - 3t)$
   (o) $\gamma(t) = (t^4 - 2t^3 - 2t^2, t^3 - 3t)$
   (p) $\gamma(t) = (2t^3 - 3t^2, t^3 - 12t)$

2. Associe as equações paramétricas aos gráficos I a VI. Justifique sua escolha.

   (a) $x = t^3 - 2t,\ \ y = t^2 - t$
   (b) $x = t^3 - 1,\ \ y = 2 - t^2$
   (c) $x = \text{sen}\,(3t),\ \ y = \text{sen}\,(4t)$
   (d) $x = t + \text{sen}\,(2t),\ \ y = t + \text{sen}\,(3t)$
   (e) $x = \text{sen}\,(t + \text{sen}\, t),\ \ y = \cos(t + \cos t)$
   (f) $x = \cos t,\ \ y = \text{sen}\,(t + \text{sen}\,(5t))$

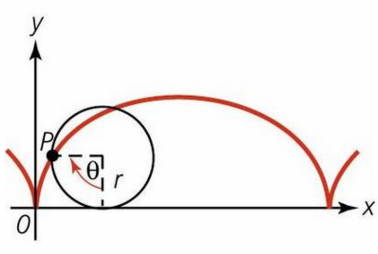


3. Considere $f(x) = \left(\sqrt[3]{x}\right)^2$. A função f é derivável em $x = 0$? Determine uma curva $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, derivável e cuja imagem seja igual ao gráfico de f.

4. Mostre que a curva $\gamma(t) = (\cos t, \text{sen}\, t \cos t)$ admite duas retas tangentes em (0,0) e ache suas equações.

5. Sejam I um intervalo aberto de $\mathbb{R}$ e $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$ uma curva diferenciável. Mostre que, se existe $C \in \mathbb{R}$ tal que $|\gamma(t)| = C$, para todo $t \in I$, então $\gamma(t)$ é ortogonal a $\gamma'(t)$, para todo $t \in I$. Vale a recíproca? Interprete geometricamente.

6. Uma circunferência de raio r rola sem escorregar ao longo do eixo Ox. Encontre equações paramétricas para a curva descrita por um ponto da circunferência que se encontra inicialmente no origem (Esta curva é chamada de ciclóide).



7. Calcule o comprimento da curva γ:

① $\gamma_1(t) = (2t^2 - 1, 4t^2 + 3)\ ,\ t \in [-4, 4]$;

② $\gamma_2(t) = (\cos^2 t, \operatorname{sen}^2 t)\ ,\ t \in [0, \pi]$;

③ $\gamma_3(t) = (\cos t + t \operatorname{sen} t, \operatorname{sen} t - t \cos t)\ ,\ t \in [0, \pi]$.

8. Encontre o comprimento de um arco da ciclóide $x = r(\theta - \operatorname{sen}\theta)$, $y = r(1 - \cos\theta)$ (Dica: Use a identidade $1 - \cos\theta = 2\operatorname{sen}^2(\theta/2)$).

9. Mostre que o comprimento da elipse $x = a\cos\theta$, $y = b\operatorname{sen}\theta$, $a > b > 0$, $0 \le \theta \le 2\pi$ é

$$4a \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - \varepsilon^2 \operatorname{sen}^2\theta}\, d\theta,$$

onde $\varepsilon = c/a$ é a excentricidade da elipse e $c = \sqrt{a^2 - b^2}$.

10. Esboce a astróide $x = a\cos^3\theta$, $y = b\operatorname{sen}^3\theta$, $0 \le \theta \le 2\pi$, $a > 0$, e calcule seu comprimento.

11. Encontre pelo menos três conjuntos distintos de equações paramétricas para representar a curva $y = x^3$, $x \in \mathbb{R}$.

12. Encontre as equações das retas tangentes à curva paramétrica $x(t) = 3t^2 + 1$, $y(t) = 2t^3 + 1$ que passam pelo ponto $(4, 3)$.

13. Seja $\gamma : (a, b) \to \mathbb{R}^2$ uma curva regular parametrizada pelo comprimento de arco s. O *vetor normal* a γ no ponto $\gamma(t)$ é definido por $n(s) = (-y'(s), x'(s))$, $a < s < b$.

① Mostre que os vetores $\gamma'(s)$ e $\gamma''(s) = (x''(s), y''(s))$ são perpendiculares para qualquer $s \in (a, b)$.

② Mostre que existe uma função $\kappa : (a, b) \to \mathbb{R}$ diferenciável tal que $\gamma''(s) = \kappa(s)n(s)$, para $a < s < b$. O valor $\kappa(s)$ é chamado *curvatura* de γ em $\gamma(s)$. Mostre que $\kappa = x'y'' - x''y'$, onde $'$ denota a derivada em relação a s.

③ Considere o ângulo $\theta(s)$ formado pelo eixo x e pela reta tangente a γ em $\gamma(s)$, i.e., $\tan\theta(s) = y'(s)/x'(s)$. Mostre que $\kappa(s) = \theta'(s)$ para cada $s \in (a, b)$ e interprete geometricamente o que significa o sinal da curvatura de γ.

④ Seja $\alpha : (a, b) \to \mathbb{R}^2$ uma curva regular qualquer com $\alpha(t) = (p(t), q(t))$, $a < t < b$, s o parâmetro de comprimento de arco e $\beta(s) = \alpha(t(s))$, a reparametrização de α por comprimento de arco. Como β é parametrizada por comprimento de arco, a curvatura κ de β é bem-definida. Mostre que

$$\kappa = \frac{p'q'' - p''q'}{(p'^2 + q'^2)^{3/2}}$$

O valor desta função em $s = s(t)$ é chamado de *curvatura* de α em $\alpha(t)$.

⑤ Mantendo a notação do ítem anterior, admitindo que α seja o gráfico de uma função $y = f(t)$, mostre que a curvatura é dada por $\kappa = \frac{f''}{(1+(f')^2)^{3/2}}$.

⑥ Calcule a curvatura da *espiral logarítmica* $\alpha(t) = (e^t \cos t, e^t \operatorname{sen} t)$, $t \in \mathbb{R}$.

14. Esboce as seguintes curvas dadas em coordenadas polares:

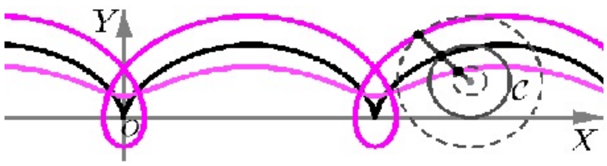
① $r = 1$ ② $\theta = \pi/3$ ③ $r = \cos\theta$ ④ $r = \cos 2\theta$
⑤ $r = 1 + \operatorname{sen}\theta$ ⑥ $r = \cos 3\theta$ ⑦ $r = 2|\operatorname{sen}\theta|$ ⑧ $r = \frac{1}{\cos\theta}$
⑨ $r = \theta$ ⑩ $r^3 - 4r^2 + 5r - 2 = 0$

15. Encontre equações polares e faça um esboço das as curvas dadas abaixo em equações cartesianas:

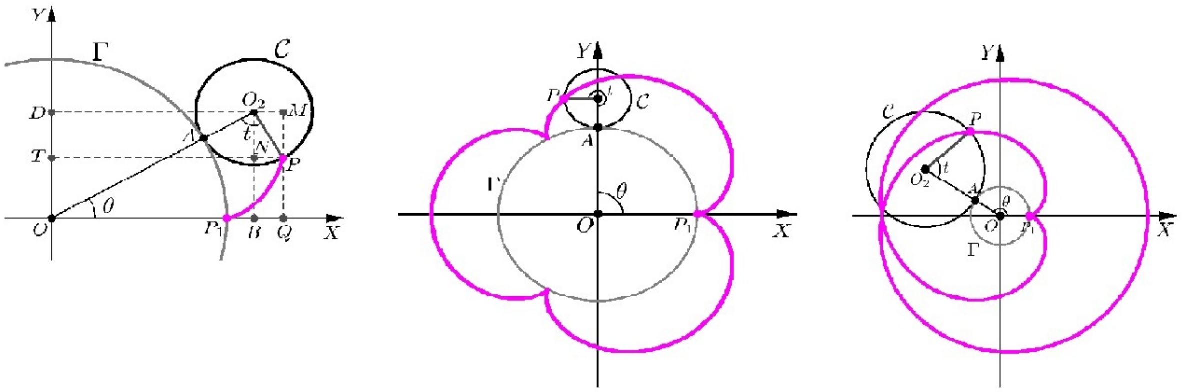
① $x^2 + y^2 = a^2$, $a > 0$ ② $2x + 3y = 1$ ③ $x^2 - y^2 = 1$ ④ $x^2 + 2y^2 = 1$
⑤ $x^2 + y^2 = e^{2y/x}$ ⑥ $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$ ⑦ $y - x\tan((x^2 + y^2)^{-1/2}) = 0$ ⑧ $(x^2 + y^2)^3 = 4x^2y^2$

✰ Curvas notáveis

16. Consideremos a circunferência C de centro $(0, r)$ e raio $r > 0$, a semi-reta $s = \{(x, y) : y \geq 0\}$ e um ponto $P = (0, R)$, $R > 0$, nessa semi-reta. Uma *trocóide* é o lugar geométrico descrito pelo ponto P quando C rola sobre o eixo x sem deslizar. Note que a ciclóide é um caso particular de trocóide quando $P \in C$. Quando P é exterior a C, a trocóide é chamada de *ciclóide longa*; quando P é interior a C, a trocóide é chamada de *ciclóide curta*. Encontre equações paramétricas que descrevam a trocóide.



17. Consideremos dois círculos Γ e C de raios $R > 0$ e $r > 0$, respectivamente, os quais se tocam exteriormente apenas em um ponto P. Admitamos também que Γ seja centrado na origem e C tenha centro no ponto $(R + r, 0)$. Denominamos *epiciclóide* o lugar geométrico descrito pelo ponto P quando C rola (sem deslizar) sobre Γ. A primeira figura abaixo ilustra este processo; as duas figuras seguintes ilustram os casos $r < R$ e $r > R$, respectivamente.



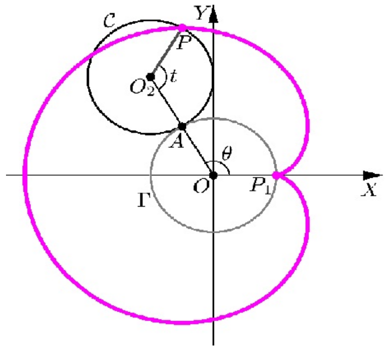
① Sejam (x, y) as coordenadas do ponto P na primeira figura. Mostre que $x = OB - QB$, $y = OD - DT$, $OB = (R + r)\cos\theta$ e $OD = (R + r)\operatorname{sen}\theta$.

② Mostre que $QB = r\cos(\theta + t)$ e $DT = r\operatorname{sen}(\theta + t)$.

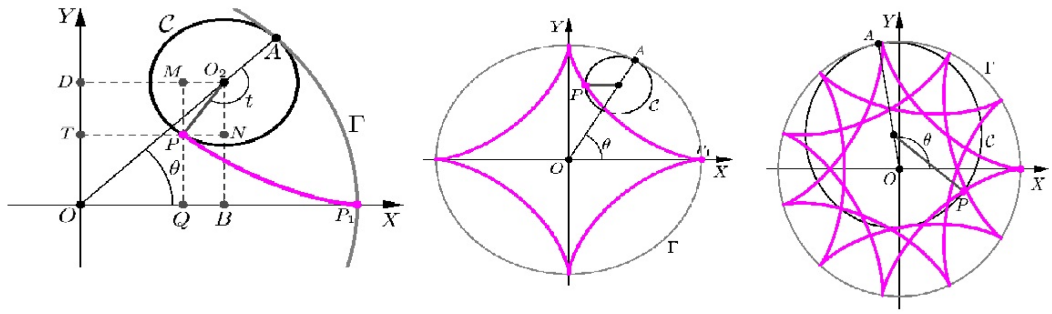
③ Mostre que $t = R\theta/r$ e conclua que as equações paramétricas da epiciclóide são

$$x = (R + r)\cos\theta - r\cos\left(\left(\frac{R + r}{r}\right)\theta\right) \text{ e } y = (R + r)\operatorname{sen}\theta - r\operatorname{sen}\left(\left(\frac{R + r}{r}\right)\theta\right).$$

Quando $R = r$, a curva obtida é chamada de *cardióide*.



18. Consideremos dois círculos Γ e C de raios $R > 0$ e $r > 0$, respectivamente, os quais se tocam *interiormente* apenas em um ponto P. Admitamos também que Γ seja centrado na origem e C tenha centro no ponto $(R + r, 0)$. Denominamos *hipociclóide* o lugar geométrico descrito pelo ponto P quando C rola (sem deslizar) sobre Γ. A primeira figura abaixo ilustra este processo; as duas figuras seguintes ilustram hipociclóides.



Usando raciocínios semelhantes àqueles utilizados no problema anterior, mostre que a hipociclóide tem equações paramétricas

$$x = (R - r)\cos\theta + r\cos\left(\left(\frac{R-r}{r}\right)\theta\right) \ \text{ e } \ y = (R - r)\operatorname{sen}\theta - r\operatorname{sen}\left(\left(\frac{R-r}{r}\right)\theta\right).$$

A hipociclóide obtida com $r = R/4$ é chamada de *astróide*.

19. O *fólium de Descartes* é a curva γ descrita pelas equações paramétricas $x(t) = \frac{3at}{1+t^3}$ e $y(t) = \frac{3at^2}{1+t^3}$, com $t \neq -1$, onde $a > 0$ é fixado.

   ① Mostre que γ satisfaz a equação cartesiana $x^3 + y^3 = 3axy$. Em particular, γ é simétrica em relação à reta $y = x$.

   ② Mostre que a reta $x + y + a = 0$ é uma assíntota de γ.

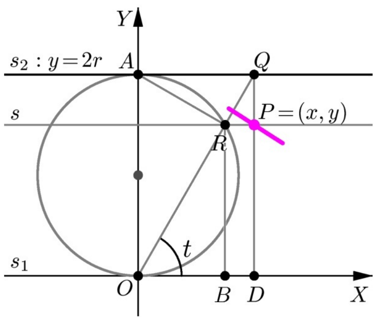
   ③ Faça um esboço de γ .

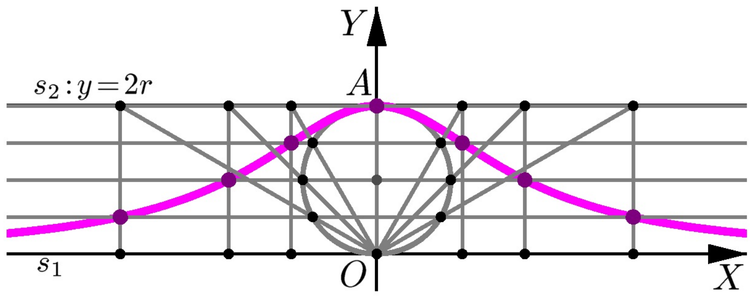
20. A *lemniscata de Bernoulli* é a curva γ descrita pelas equações paramétricas $x(t) = \frac{t}{1+t^4}$ e $y(t) = \frac{t^3}{1+t^4}$, $t \in \mathbb{R}$.

   ① Mostre que γ satisfaz a equação cartesiana $(x^2 + y^2)^2 = xy$. Em particular, γ é simétrica em relação à reta $y = x$.

   ② Faça um esboço de γ .

21. Seja C um círculo de raio $r > 0$ tangente ao eixo x e à reta $y = 2r$, onde $r > 0$ é fixado, conforme mostrado na primeira figura abaixo. Da origem, traçamos uma semi-reta em direção à reta s_2 e denotemos por R e Q os pontos de intersecção desta semi-reta com C e s_2, respectivamente. O segmento QD é perpendicular a s_1 e a reta s é paralela a s_1. Consideremos também a reta s paralela ao eixo x passando por R e P o ponto de interseção da reta s com o segmento QD. Os pontos $P = (x, y)$ obtidos traçando todas as semi-retas que partem de O e intersectam C, descrevem a curva denominada *bruxa de Agnesi*, descrita na segunda figura abaixo.



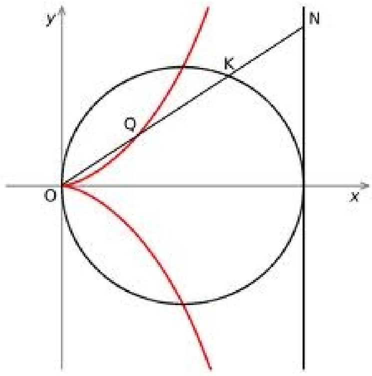


① Mostre que $x = OQ\cos t$ e $y = OR\,\mathrm{sen}\,t$.

② Mostre que $OQ = 2r/\mathrm{sen}\,t$ e $OR = 2r\,\mathrm{sen}\,t$.

③ Obtenha equações paramétricas para a bruxa de Agnesi.

22. Seja C o círculo de centro $(r, 0)$ e raio $r > 0$ e considere a reta $x = 2r$, conforme mostra a figura abaixo. Traçando uma semi-reta s qualquer partindo da origem, sejam K e N os seus pontos de intersecção com C e s, respectivamente. O ponto Q sobre s tem a propriedade que $OQ = KN$. Os pontos $P = (x, y)$ obtidos quando traçamos todas as semi-retas que partem da origem e intersectam s formam uma curva γ chamada de *cissóide de Diocles*. O parâmetro que usaremos para parametrizar esta curva é o ângulo θ entre o segmento ON e o eixo x.



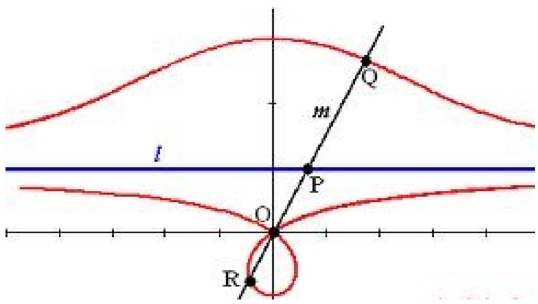
① Mostre que $OK = 2r\cos\theta$ e $ON = \frac{2r}{\cos\theta}$. Conclua que $KN = 2r\frac{\mathrm{sen}^2\theta}{\cos\theta}$.

② Obtenha equações paramétricas para γ.

③ Mostre que a equação de γ em coordenadas polares é $r = 2r\,\mathrm{sen}\,\theta\tan\theta$.

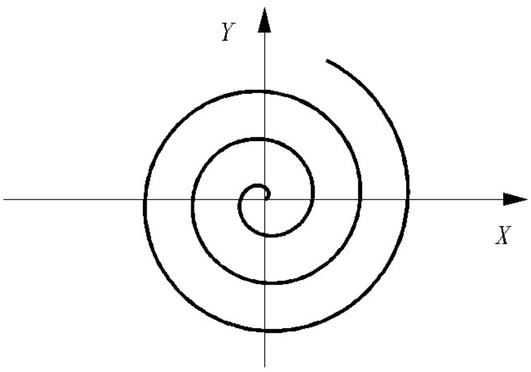
④ Mostre que γ tem equação cartesiana $x^3 + (x - 2r)y^2 = 0$.

23. Sejam $a, b > 0$ r a reta horizontal $y = a$. Tracemos uma reta s partindo da origem em direção à r e chamemos de P o ponto de intersecção de s e r. Os pontos Q e R tais que as medidas dos segmentos PQ e PR são constantes iguais a b formam uma curva chamada de *conchóide de Nicomedes*.



Usando o ângulo θ entre a reta s e o eixo x como parâmetro, mostre que γ tem equações paramétricas $x = a\,\mathrm{cotg}\,\theta + b\cos\theta$ e $y = a + b\,\mathrm{sen}\,\theta$, $0 < |\theta| < \pi$.

24. A *espiral de Arquimedes* é a curva γ descrita em coordenadas polares pela equação $r = a\theta$, $\theta \geq 0$, onde $a > 0$ é fixo.



① Encontre equações paramétricas para as espirais de Arquimedes.

② Mostre que γ satisfaz a equação $x\tan(\sqrt{x^2+y^2}/a) = y$.

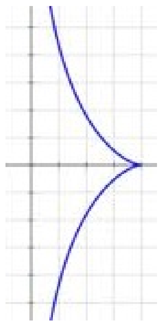
③ Mostre que a distância entre dois pontos de intersecção consecutivos de γ com o eixo x é constante igual a $2a\pi$.

25. Seja γ uma curva diferenciável contida no primeiro quadrante, P um ponto de γ, r a reta tangente à γ em P. Admitindo que r não seja vertical, seja Q o ponto de intersecção entre r e o eixo y. Suponha que o segmento PQ tenha comprimento constante igual a $a > 0$.

① Pondo $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, mostre que γ satisfaz a equação diferencial $\frac{dy}{dx} = \pm\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x}$.

② Resolva esta equação fazendo a substituição trigonométrica $x = a\operatorname{sen}\theta$ e usando a relação trigonométrica $\operatorname{sen}\theta = \frac{2\tan(\theta/2)}{\sec^2(\theta/2)}$.

③ Mostre que $x(\theta) = a\cos\theta$, $y(\theta) = a\cos\theta + a\ln(\tan(\theta/2))$, $|\theta| < \pi/2$, é uma parametrização da curva γ. Esta curva é chamada de *tractriz* e seu traço é a figura abaixo.



✰ Funções reais de duas e três variáveis

26. Ache e esboce o domínio das funções:

(a) $f(x,y) = \sqrt{x-y}$ (b) $f(x,y) = \arctan\frac{y}{x}$
(c) $f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2-1}}$ (d) $f(x,y) = \frac{x}{y^x}$
(e) $f(x,y) = \tan(x-y)$ (f) $f(x,y) = \ln(xy^2 - x^3)$
(g) $f(x,y) = \ln(16 - 4x^2 - y^2)$

27. Esboce uma família de curvas de nível de:

(a) $f(x,y) = \frac{x+y}{x-y}$ (b) $f(x,y) = x - \sqrt{1-y^2}$
(c) $f(x,y) = \frac{x^2}{x^2-y^2}$ (d) $f(x,y) = \frac{2xy^2}{x^2+y^4}$

28. Esboce os gráficos de:

(a) $f(x,y)=1-x-y$	(b) $f(x,y)=\frac{x}{x^2+1}$	(c) $f(x,y)=\sqrt{x^2+9y^2}$
(d) $f(x,y)=4x^2+y^2$	(e) $f(x,y)=y^2-x^2$	(f) $f(x,y)=y^2+1$
(g) $f(x,y)=y^2+x$	(h) $f(x,y)=xy$	(i) $f(x,y)=e^{\sqrt{x^2+y^2}}$
(j) $f(x,y)=\frac{1}{4x^2+9y^2}$	(k) $f(x,y)=(x-y)^2$	(l) $f(x,y)=x^2+y^2+2y+3$
(m) $f(x,y)=\frac{1}{(x^2+2y^2)^2}$	(n) $f(x,y)=\ln(9x^2+y^2)$	(o) $f(x,y)=2-\sqrt[4]{x^2+4y^2}$
(p) $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2-9}$	(q) $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2+1}$	

29. Seja $\gamma(t)=(e^t+1,e^{-t})$, para $t\in\mathbb{R}$.

① Desenhe a imagem de γ indicando o sentido de percurso.

② A imagem de γ está contida na curva de nível de $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dada por $f(x,y)=x^2y^2-2y-y^2+4$? Em caso afirmativo, em qual nível?

30. Em cada caso, esboce a superfície formada pelo conjunto dos pontos $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ tais que:

(a) $x+2y+3z=1$	(b) $x^2+2y^2+3z^2=1$	(c) $x^2+y^2-z^2=0$
(d) $x^2+y^2-z^2=-1$	(e) $x^2+y^2-z^2=1$	(f) $x^2-y^2=1$
(g) $x^2-y^2+z^2=1$		

Alguma dessas superfícies é o gráfico de uma função $f:D\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$?

31. Verifique que a imagem da curva $\gamma(t)=(\cos t,\cos t,\sqrt{2}\operatorname{sen} t)$, $t\in[0,\pi[$, está contida numa esfera com centro em $(0,0,0)$ e esboce a imagem de γ.

32. Seja $\gamma(t)=(\sqrt{t^2+1}\cos t,\sqrt{t^2+1}\operatorname{sen} t,t)$, $t\in\mathbb{R}$. Verifique que a imagem de γ está contida na superfície $x^2+y^2-z^2=1$. Esboce a imagem de γ.

33. Desenhe as imagens das seguintes curvas:

(a) $\gamma(t)=(1,t,1)$	(b) $\gamma(t)=(\cos t,\operatorname{sen} t,2)$
(c) $\gamma(t)=(e^{-t}\cos t,e^{-t}\operatorname{sen} t,e^{-t})$, $t\geq 0$	(d) $\gamma(t)=(t,\cos t,\operatorname{sen} t)$, $t\geq 0$
(e)$\gamma(t)=(\operatorname{sen} t,\operatorname{sen} t,\sqrt{2}\cos t), 0\leq t\leq 2\pi$	(f) $\gamma(t)=(1+\operatorname{sen} t,1+\operatorname{sen} t,\cos t)$

34. Seja $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2+4}$ e seja $\gamma(t)=(t\cos t,t\operatorname{sen} t,\sqrt{t^2+4})$, $t\geq 0$.

(a) Mostre que a imagem de γ está contida no gráfico de f.

(b) Faça um esboço da imagem de γ.

35. Encontre uma parametrização para a curva de nível no nível k de f nos casos:

① $f(x,y)=x+2y-3$, $k=-2$;

② $f(x,y)=x-\sqrt{1-2y^2}$, $k=5$;

③ $f(x,y)=\frac{1}{x^2-y^2}$, $k=1$.

Encontre a reta tangente às curvas dos itens (a), (b) e (c) acima nos pontos $(\frac{1}{2},\frac{1}{4})$, $(6,0)$ e $(\sqrt{2},1)$, respectivamente.

36. Encontre uma parametrização para as curvas C abaixo:

① C é a intersecção do parabolóide hiperbólico $z=y^2-x^2$ com o cilindro $x^2+y^2=1$.

② C é a intersecção da superfície $x^2+y^2-2z^2=1$ com o plano $y=2z+1$.

③ C é a intersecção do plano $x=z$ com o parabolóide $x^2+y^2=z$.

④ C é a intersecção do cone $z=\sqrt{4x^2+y^2}$ com o plano $z=2x+1$.

⑤ $C=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\mid x^2+y^2+z^2=1 \text{ e } z=x+1\}$.

⑥ $C=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\mid z=\sqrt{x^2+y^2} \text{ e } z=x+1\}$.

⑦ $C=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\mid x^2+y^2+z^2=1 \text{ e } (x-1)^2+y^2+(z-1)^2=1\}$.

37. Seja $f(x,y)=\frac{2x^2+4y^2}{x^2+y^2+1}$.

① Esboce as curvas de nível de f dos níveis $c=1$, $c=2$ e $c=3$.

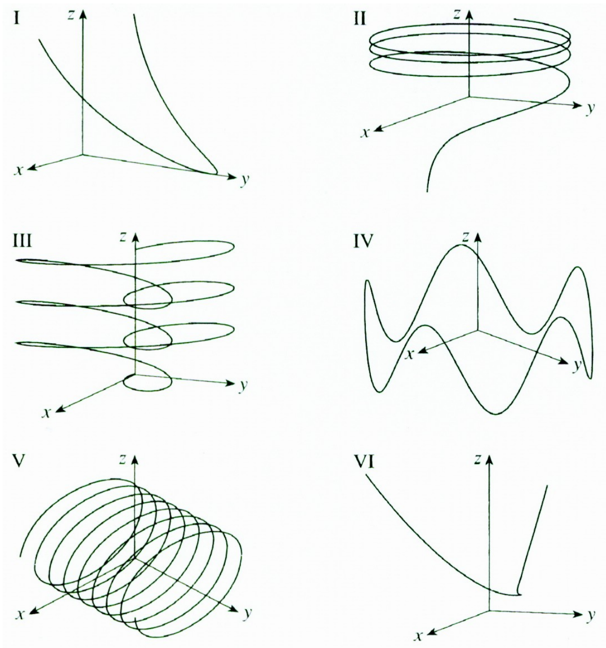
② Encontre uma curva diferenciável γ cuja imagem seja a curva de nível de f do nível $c=1$.

③ Determine o vetor tangente à curva γ do item anterior no ponto $(-1,0)$.

④ Seja $\gamma:[0,2\pi]\to\mathbb{R}^3$ dada por $\gamma(t)=(\operatorname{sen} t,\cos t,z(t))$. Sabendo que a imagem da curva está contida no gráfico de f, encontre o vetor tangente a γ em $\gamma(\frac{\pi}{3})$.

38. Combine as equações com os esboços das imagens. Justifique a sua escolha:

(a) $\gamma(t)=(\cos 4t,t,\operatorname{sen} 4t)$ (b) $\gamma(t)=(t^2-2,t^3,t^4+1)$
(c) $\gamma(t)=(t,\frac{1}{1+t^2},t^2)$ (d) $\gamma(t)=(\operatorname{sen} 3t\cos t,\operatorname{sen} 3t\operatorname{sen} t,t)$
(e) $\gamma(t)=(\cos t,\operatorname{sen} t,\ln t)$ (f) $\gamma(t)=(\cos t,\operatorname{sen} t,\operatorname{sen} 5t)$



☆ **Limites e continuidade**

39. Calcule os seguintes limites, caso existam. Se não existirem, explique por quê:

(a) $\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy}{x^2+y^2}$ (b) $\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2y\cos(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$

(c) $\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$ (d) $\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2y}{2x^4+x^2y+y^2}$

(e) $\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{2x^2+3xy+4y^2}{3x^2+5y^2}$ (f) $\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2y}{x^4+y^2}$

(g) $\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy}{x^3-y}$ (h) $\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^4\operatorname{sen}(x^2+y^2)}{x^4+y^2}$

(i) $\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{(x+y)^3}{x^2+y^2}$ (j) $\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2}{x^2+y^2}\operatorname{sen}\left(\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$

(k) $\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^3y+y^4+x^4}{x^3y-xy^3}$ (l) $\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^3+\operatorname{sen}(x^2+y^2)}{y^4+\operatorname{sen}(x^2+y^2)}$

(m) $\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\operatorname{sen}(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$ (n) $\lim_{(x,y)\to(0,0)}(x^2+y^2)\ln(x^2+y^2)$

(o) $\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy^4}{x^2+y^8}$ (p) $\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2\operatorname{sen}^2 y}{x^2+2y^2}$

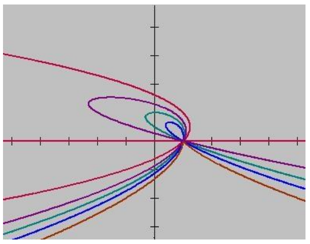
40. Determine o conjunto dos pontos de continuidade das funções abaixo:

(a) $f(x,y)=\frac{\operatorname{sen}(xy)}{e^x-y^2}$ (b) $f(x,y)=\frac{\sqrt{x-y^3}}{1-x^2-y^2}$

(c) $f(x,y)=\arctan(x+\sqrt{1/y})$ (d) $f(x,y)=\arcsin(x^2+y^2)$

(e) $f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^2y^3}{2x^2+y^3} & \text{, se } (x,y)\neq(0,0)\\ 1 & \text{, se } (x,y)=(0,0)\end{cases}$ (f) $f(x,y)=\begin{cases}\frac{(x^2-y^2)(x-1)^2}{(x^2+y^2)((x-1)^2+(y-1)^2)} & \text{, se } (x,y)\neq(0,0) \text{ e } (x,y)\neq(1,1)\\ 1 & \text{, se } (x,y)=(0,0) \text{ ou } (x,y)=(1,1)\end{cases}$

41. O domínio de uma função f é o conjunto $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | (x,y) \neq (1,0)\}$. A figura abaixo mostra as curvas de nível de f nos níveis $k = 0$, $k = 0,3$, $k = 0,5$, $k = 0,7$ e $k = 1$. Existe $\lim\limits_{(x,y)\to(1,0)} f(x,y)$? Justifique.



✰ Respostas

(2) (a)-IV, (b)-VI, (c)-V, (d)-III, (e)-I, (f)-II; **(3)** Não; $\gamma(t) = (t^3, t^2)$; **(4)** $(x,y) = (0,0) + t(\pm 1, 0)$;
(6) $x(\theta) = r(\theta - \operatorname{sen}\theta)$ e $y(\theta) = r(1 - \cos\theta)$; **(7)** ① $64\sqrt{5}$, ② $\sqrt{2}$, ③ $\pi^2/2$; **(8)** $8r$;
(10) $6a(\sqrt{2} + \ln(1+\sqrt{2}))$; **(11)** $x(\theta) = r\theta + (R-r)\operatorname{sen}\theta$ e $y(\theta) = r\theta + (R-r)\cos\theta$;
(12) $t = 1$: $x - y - 1 = 0$ e $t = -2$: $2x + y - 11 = 0$; **(15)** ① $r = a$; ② $r = 1/(2\cos\theta + 3\operatorname{sen}\theta)$;
③ $r = 1/\sqrt{\cos(2\theta)}$; ④ $r = 1/\sqrt{\cos^2\theta + 2\operatorname{sen}^2\theta}$; ⑤ $r = e^{\theta}$; ⑥ $r = (\cos^{2/3}\theta + \operatorname{sen}^{2/3}\theta)^{-3/2}$; ⑦ $r = 1/\theta$;
⑧ $r = 2|\operatorname{sen}(2\theta)|$; **(16)** $x = rt - R\operatorname{sen} t$ e $y = r - R\cos t$; **(21)** ③ $x = 2r\operatorname{cotg}\theta$ e $y = 2r\operatorname{sen}^2\theta$;
(22) ② $x = 2r\operatorname{sen}^2\theta$ e $y = 2r\left(\tan\theta - \frac{\operatorname{sen}(2\theta)}{2}\right)$; **(24)** $x = a\theta\cos\theta$ e $y = a\theta\operatorname{sen}\theta$;
(26) (a) $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \leq x\}$; (b) $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \neq 0\}$; (c) $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 > 1\}$;
(d) $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}$;
(e) $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \neq x + \frac{1+2k}{2}\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$; (f) $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x(y-x)(y+x) > 0\}$;
(g) $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 4x^2 + y^2 < 16\}$; **(35)** ① $x = 1 - 2t$, $y = t$;
② $x = 5 + \sqrt{1 - 2t^2}$ e $y = t$; ③ $x = \cosh t$, $y = \sinh t$; **(36)** ① $\gamma(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, \cos 2t)$;
② $\gamma(t) = (2^{-1/2}\cos t, \operatorname{sen} t, -1/2 + (1/2)\operatorname{sen} t)$; ③ $\gamma(t) = \frac{1}{2}(1 + \cos t, \operatorname{sen} t, 1 + \cos t)$;
④ $\gamma(t) = (t, 4t+1, \sqrt{20t^2 + 8t + 1})$, $t \geq -1/2$; ⑤ $\gamma(t) = (\frac{1}{2}(1+\cos t), 2^{-1/2}\operatorname{sen} t, \frac{1}{2}(3 + \cos t)$; ⑥ $\gamma(t) = (\frac{t^2-1}{2}, t, \frac{t^2+1}{2})$;
⑦ $\gamma(t) = (\frac{1}{2}(1 + \cos t), 2^{-1/2}\operatorname{sen} t, \frac{1}{2}(1 - \cos t))$; **(38)** a-V, b-VI, c-I,d-III, e-II, f-IV; **(39)** Os limites (a), (d), (f), (g), (k), (o) não existem; (b), (c), (h), (i), (j), (n), (p) existem e valem zero; (l), (m) existem e valem 1;
(40) (a) $\{(x,y) : y \neq e^{x/2}\}$; (b) $\{(x,y) : x \geq y^3$ e $x^2 + y^2 \neq 1\}$; (c) $\{(x,y) : y \geq 0\}$; (d) $\{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$; (e) $\mathbb{R}^2$;
(f) $\{(x,y) : (x,y) \neq (0,0)$ e $(x,y) \neq (1,1)\}$; **(41)** Não.