

Lista 1

☆ Derivadas parciais, gradiente e diferenciabilidade

1. Ache as derivadas parciais de primeira ordem das funções:

(a) $f(x, y) = \arctan(y/x)$ (b) $f(x, y) = \ln(1 + \cos^2(xy^3))$ (c) $f(x, y) = \frac{1-xy}{1+x^2+y^2}$

2. Seja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável. Calcule as derivadas parciais de primeira ordem de:

(a) $u(x, y) = f\left(\frac{x}{y}\right)$ (b) $u(x, y) = f(ax + by)$, onde a e b são constantes.
 (c) $u(x, y) = f(xy^2 - 2x)$ (d) $u(x, y) = f(e^{x^2+y^2})$

3. Dada a função $f(x, y) = x(x^2 + y^2)^{-\frac{3}{2}} e^{\sin(x^2 y)}$, ache $\frac{\partial f}{\partial x}(1, 0)$. (Neste caso, usar a definição de derivada parcial é menos trabalhoso do que aplicar as regras de derivação.)

4. Verifique que a função $u(x, y) = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$ é solução da equação de Laplace bidimensional $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$.

5. Sejam $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, deriváveis até 2a. ordem.

(a) Mostre que $u(x, t) = f(x + ct) + g(x - ct)$ satisfaz a equação $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$.
 (b) Mostre que $u(x, y) = xf(x+y) + yg(x+y)$ é solução da equação

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

6. Sejam $f(x, y) = (x^2 + y^2)^{\frac{2}{3}}$ e $g(x, y) = |xy|^{\frac{5}{4}}$. Mostre que f e g são de classe C^1 em \mathbb{R}^2 .

7. Calcule $\frac{\partial w}{\partial t}$ e $\frac{\partial w}{\partial u}$ pela regra da cadeia e confira os resultados por meio de substituição seguida de aplicação das regras de derivação parcial.

(a) $w = x^2 + y^2; x = t^2 + u^2, y = 2tu$.
 (b) $w = \frac{x}{x^2 + y^2}; x = t \cos u, y = t \sin u$.
 (c) $w = x^2 + y^2 + z; x = tu, y = t + u, z = t^2 + u^2$.

8. Seja $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe C^2 . Calcule g_u, g_v , em função de f_x, f_y nos seguintes casos:

(a) $g(u, v) = f(u^2, v^3)$ (b) $g(u, v) = \sin u - f(2u - 3v^2, u - \cos v)$
 (c) $g(u, v) = f(\sin(u + v), \cos(u - v))$ (d) $g(u, v) = f(e^{u^2}, \ln(u + v))$

9. Uma função $f: \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}$ é **homogênea de grau** λ se satisfaz $f(tx, ty) = t^\lambda f(x, y)$ para todos $t > 0$ e $(x, y) \neq (0, 0)$, para um certo $\lambda \in \mathbb{R}$ fixo. Supondo que f é uma função de classe C^2 homogênea de grau λ , verifique que:

(a) $xf_x + yf_y = \lambda f$; (Relação de Euler)
 (b) As funções f_x e f_y são homogêneas de grau $\lambda - 1$.

10. Verifique que as funções abaixo são homogêneas e determine o grau:

(a) $f(x, y) = 5x^2 + 2xy - y^2$ (b) $f(x, y) = \frac{xe^{\frac{x}{y}}}{x^2 + y^2}$
 (b) $f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x^3 + y^3}}$ (c) $f(x, y) = \frac{xy \sin(y/x)}{x^4 + y^4}$

11. Seja $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2 + y^4} + \sin(x + 3y) & \text{se } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$

(a) Mostre que as derivadas parciais $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$ existem em todos os pontos.

(b) f é contínua em $(0, 0)$?

(c) f é diferenciável em $(0, 0)$?

12. Seja $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$

(a) Mostre que f é contínua em $(0, 0)$.

(b) Calcule $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$.

(c) f é diferenciável em $(0, 0)$?

(d) São $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$ contínuas em $(0, 0)$?

13. Considere $f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) & \text{se } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$

(a) Mostre que f é diferenciável em $(0, 0)$.

(b) As derivadas parciais $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$ são contínuas em $(0, 0)$?

14. Seja $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 \sin((x^2 + y^2)^2)}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$

(a) Verifique que f é contínua em $(0, 0)$.

(b) Determine $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

(c) A função $\frac{\partial f}{\partial y}$ é contínua em $(0, 0)$? Justifique sua resposta.

(d) A função f é diferenciável em $(0, 0)$? Justifique sua resposta.

15. Seja $f(x, y) = \begin{cases} xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, & \text{se } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$

(a) Verifique que $\frac{\partial f}{\partial x}(0, y) = -y$ para todo y , e que $\frac{\partial f}{\partial y}(x, 0) = x$, para todo x .

(b) Verifique que $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) = 1$ e que $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0) = -1$.

16. Determine o conjunto de pontos de \mathbb{R}^2 onde f **não** é diferenciável, sendo:

(a) $f(x, y) = \sqrt[3]{x^3 + y^3}$

(b) $f(x, y) = x|y|$

(c) $f(x, y) = e^{\sqrt{x^4 + y^4}}$

(d) $f(x, y) = \cos(\sqrt{x^2 + y^2})$

17. Mostre que não existe nenhuma função diferenciável $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\nabla f(x, y) = (x^2 y, y^2)$ para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

18. O raio de um cilindro circular está decrescendo à taxa de 1,2cm/s enquanto sua altura está crescendo à taxa de 3cm/s. A que taxa o volume do cilindro está variando quando o raio vale 80 cm e a altura vale 150 cm?

19. Sejam $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, diferenciável em \mathbb{R}^2 , com $\nabla f(-2, -2) = (a, -4)$ e

$$g(t) = f(2t^3 - 4t, t^4 - 3t).$$

Determine a para que a reta tangente ao gráfico de g no ponto de abscissa 1 seja paralela à reta $y = 2x + 3$.

20. Seja $u = u(x, y)$ função de classe C^2 em \mathbb{R}^2 e defina $v(r, \theta) = u(r \cos \theta, r \sin \theta)$. Verifique que

$$\frac{\partial^2 v}{\partial r^2}(r, \theta) + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r}(r, \theta) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2}(r, \theta) = \Delta u(r \cos \theta, r \sin \theta),$$

onde, por definição, $\Delta u = u_{xx} + u_{yy}$.

21. Seja $f = f(x, y)$ uma função de classe C^2 e seja $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $g(u, v) = uf(u^2 - v, u + 2v)$.

(a) Determine $\frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v}$ em função das derivadas parciais de f .

(b) Sabendo que $3x + 5y = z + 26$ é o plano tangente ao gráfico de f , $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1, 4) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1, 4) = 1$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1, 4) = -1$, calcule $\frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v}(-2, 3)$.

22. Seja $F(r, s) = G(e^{rs}, r^3 \cos(s))$, onde $G = G(x, y)$ é uma função de classe C^2 em \mathbb{R}^2 .

(a) Calcule $\frac{\partial^2 F}{\partial r^2}(r, s)$ em função das derivadas parciais de G .

(b) Determine $\frac{\partial^2 F}{\partial r^2}(1, 0)$ sabendo que $\frac{\partial G}{\partial y}(t^2 + 1, t + 1) = t^2 - 2t + 3$.

23. Ache a equação do plano tangente e a equação da reta normal a cada superfície no ponto indicado:

(a) $z = e^{x^2+y^2}$, no ponto $(0, 0, 1)$ (b) $z = \ln(2x + y)$, no ponto $(-1, 3, 0)$
 (c) $z = x^2 - y^2$, no ponto $(-3, -2, 5)$. (d) $z = e^x \ln y$, no ponto $(3, 1, 0)$.

24. Determine a equação do plano que passa pelos pontos $(0, 1, 5)$ e $(0, 0, 6)$ e é tangente ao gráfico de $g(x, y) = x^3 y$.

25. Determine $k \in \mathbb{R}$ para que o plano tangente ao gráfico de $f(x, y) = \ln(x^2 + ky^2)$ no ponto $(2, 1, f(2, 1))$ seja perpendicular ao plano $3x + z = 0$.

26. Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função derivável. Mostre que todos os planos tangentes à superfície $z = xf\left(\frac{x}{y}\right)$ passam pela origem.

27. Seja $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, f com derivadas parciais contínuas em \mathbb{R}^2 e tal que $2x + y + z = 7$ é o plano tangente ao gráfico de f no ponto $(0, 2, f(0, 2))$. Seja

$$g(u, v) = uf(\sin(u^2 - v^3), 2u^2 v).$$

Determine $a \in \mathbb{R}$ para que o plano tangente ao gráfico de g no ponto $(1, 1, g(1, 1))$ seja paralelo ao vetor $(4, 2, a)$.

28. Seja $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável tal que as imagens das curvas $\gamma(t) = (2, t, 2t^2)$ e $\mu(t) = (2t^2, t, 2t^4)$ estejam contidas no gráfico de f . Determine o gradiente de f no ponto $(2, 1)$.

29. O gradiente de $f(x, y) = x^2 + y^4$ é tangente à imagem da curva $\gamma(t) = (t^2, t)$, $t > 0$ em um ponto P . Encontre a equação da reta tangente à curva de nível de f que contém P , no ponto P .

30. Ache a derivada direcional máxima de f no ponto dado e dê a direção em que ela ocorre.

(a) $f(x, y) = xe^{-y} + 3y$, $(1, 0)$; (b) $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$, $(1, 2)$;

31. Mostre que $f(x, y) = \sqrt[3]{x^2 y}$ é contínua em $(0, 0)$ e tem todas as derivadas direcionais em $(0, 0)$. É f diferenciável em $(0, 0)$?

32. Seja f uma função diferenciável em \mathbb{R}^2 tal que $\gamma(t) = (t+1, -t^2)$, $t \in \mathbb{R}$, é uma curva de nível de f . Sabendo que $\frac{\partial f}{\partial x}(-1, -4) = 2$, determine a derivada direcional de f no ponto $(-1, -4)$ e na direção e sentido do vetor $\vec{u} = (3, 4)$.
33. Seja $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2}, & \text{se } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$
- (a) Calcule o gradiente de f no ponto $(0, 0)$.
- (b) Mostre que $\frac{d}{dt}f(\gamma(t)) \neq \nabla f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)$ em $t = 0$, onde $\gamma(t) = (-t, -t)$.
- (c) Seja $\vec{u} = (a, b)$ um vetor unitário (isto é, $a^2 + b^2 = 1$). Use a definição de derivada direcional para calcular $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(0, 0)$.
- (d) f é diferenciável em $(0, 0)$? Justifique.
34. Seja $a > 0$ e considere o plano tangente à superfície $xyz = a$ num ponto do primeiro octante. Mostre que o tetraedro formado por este plano e os planos coordenados tem volume independente do ponto de tangência.
35. Ache os pontos do hiperbolóide $x^2 - y^2 + 2z^2 = 1$ onde a reta normal é paralela à reta que une os pontos $(3, -1, 0)$ e $(5, 3, 6)$.

☆ Máximos e mínimos

36. Determine os pontos críticos das funções abaixo e classifique-os:
- (a) $z = 2x^2 + xy + 3y^2 + 10x - 9y + 11$ (b) $z = 3xy^2 + y^2 - 3x - 6y + 7$ (c) $z = x^2y^2$
 (d) $z = x^3y^3$ (e) $z = y\sqrt{x} - y^2 - x + 6y$ (f) $z = y \cos x$
 (g) $z = (2x - x^2)(2y - y^2)$ (h) $z = y^4 + 4x^2y - 4x^2 - 8y^2$ (i) $z = xye^{-x^2-y^2}$
 (j) $z = \ln(3x^2 + 4y^2 - 2x + 7)$ (k) $z = (x-1)^3 + (y-2)^3 - 3x - 3y$
37. Encontre uma parametrização para C e use esta parametrização para encontrar, caso existam, os valores máximo e mínimo de f em C , bem como os pontos onde estes valores são assumidos, onde:
- (a) $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 2y^2 = 1\}$ e $f(x, y) = x^3y$.
 (b) $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = z \text{ e } z = 2y\}$ e $f(x, y, z) = x - z$.
 (c) $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1 \text{ e } (x-1)^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1\}$ e $f(x, y, z) = xz + y$.
 (d) $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 1 \text{ e } x - y + 3z = 3\}$ e $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$.
38. Ache a derivada direcional máxima de f no ponto dado e dê a direção em que ela ocorre.
- (a) $f(x, y, z) = xe^z + \sin(y)$, $P = (2, 0, 0)$ (b) $f(x, y, z) = -\frac{4}{y} + z \ln(x)$, $P = (1, 2, -1)$
39. Suponha que sobre uma certa região do espaço o potencial elétrico V é dado por
- $$V(x, y, z) = 5x^2 - 3xy + xyz.$$
- (a) Ache a taxa de variação do potencial em $P(3, 4, 5)$ na direção do vetor $\vec{v} = \vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$.
 (b) Em que direção V muda mais rapidamente em P ?
 (c) Qual é a maior taxa de variação em P ?
40. Ache o máximo e o mínimo absolutos da função na região D indicada.
- (a) $f(x, y) = 5 - 3x + 4y$; D é o triângulo (com interior e bordas) cujos vértices são $(0, 0)$, $(4, 0)$ e $(4, 5)$
 (b) $f(x, y) = xye^{-x^2-y^2}$; $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 2, x \leq 0, y \geq 0\}$
 (c) $f(x, y) = 2x^3 + y^4$; $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$
 (d) $f(x, y) = 2x^2 - xy + y^2 + 7x$; $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -3 \leq x \leq 3, -3 \leq y \leq 3\}$.
 (e) $f(x, y) = (4x - x^2) \cos y$; $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x \leq 3, -\frac{\pi}{4} \leq y \leq \frac{\pi}{4}\}$

41. Determine o valor máximo e o valor mínimo da função f sujeita às restrições explicitadas:
- $f(x, y) = xy$; $5x^2 + 5y^2 + 6xy - 64 = 0$
 - $f(x, y, z) = xyz$; $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 6$
 - $f(x, y, z) = x^2y^2z^2$; $x^2 + y^2 + z^2 = 1$
 - $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$; $x^4 + y^4 + z^4 = 1$
42. Determine o valor máximo e o valor mínimo de f em R sendo
- $f(x, y, z) = x^2 - 2x + y^2 - 4y + z^2 - 6z$ e $R = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq 56\}$
 - $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + 2z^2 - 4xy - 4z + 3x$ e $R = \{(x, y, z) : x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x + y + z \leq 4\}$
43. Encontre o máximo e o mínimo absolutos de $f(x, y)$ em D sendo:
- $f(x, y) = xy$; $D = \{(x, y) : x^2 - y^2 = 1, x \in [1, 2]\}$
 - $f(x, y) = 2x^3 + y^4$; $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 = 1, x \in [0, 1/4], y \geq 0\}$
44. Encontre os pontos da elipse $x^2 + xy + y^2 = 3$ mais próximos de $(0, 0)$.
45. Qual o ponto do plano $x + 2y - z + 4 = 0$ que está mais próximo do ponto $(1, 1, 1)$?
46. Determine o maior produto de 3 números reais positivos cuja soma é 100. Exiba tais números.
47. Determine a distância entre as retas de equação
 $X = (-2, 3, -1) + \alpha(4, 1, 5)$, $\alpha \in \mathbb{R}$ e $X = (-1, 0, 3) + \mu(-2, 3, 1)$, $\mu \in \mathbb{R}$.
48. Qual é o ponto da superfície $z^2 = xy + 1$ que está mais próximo da origem?
49. Seja $b \neq 0$ e $f(x, y) = \frac{y^4}{4} + bx^2y - bx^2 - 2y^2$.
- Determine, em função de b , o número de pontos críticos de f e classifique-os.
 - Faça $b = 3$ e ache os extremos de f no triângulo (fronteira e interior) de vértices $(0, 0)$, $(3, 3)$ e $(-3, 3)$.
50. Seja $f(x, y) = a(x^2 + y^2) - 2xy$, onde a é uma constante.
- Verifique que, para todo $a \in \mathbb{R}$, o par $(0, 0)$ é um ponto crítico de f .
 - Para cada valor de a , classifique o ponto crítico $(0, 0)$ com relação a máximos e mínimos locais e sela. Existem valores de a para os quais podemos afirmar que $(0, 0)$ é extremo global (absoluto) de f ?
51. A temperatura num ponto (x, y, z) do espaço é dada por $T(x, y, z) = xy + yz$. Determine os pontos da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ onde a temperatura é mais alta e onde é mais baixa. Justifique.
52. Determine as dimensões de um paralelepípedo de volume máximo, com faces paralelas aos planos coordenados, de modo que uma das faces está contida no plano $z = 0$ e a correspondente face oposta tem os seus vértices no parabolóide $z = 4 - x^2 - y^2$, $z > 0$.
53. Um pentágono de 12 cm de perímetro é construído colocando-se um triângulo isósceles sobre um retângulo. Dentre esses pentágonos, determine as medidas dos lados daquele que tem área máxima.
54. Determine a equação do plano que passa por $(2, 2, 1)$ e que delimita no primeiro octante o tetraedro de menor volume.
55. Dentre todos os planos que são tangentes à superfície $xy^2z^2 = 1$ encontre aqueles mais distantes da origem.

56. Dê as dimensões da caixa retangular sem tampa de maior volume que pode ser construída com 27cm^2 de papelão.

☆ Respostas

(1) (a) $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = -\frac{y}{x^2+y^2}$; $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{x}{x^2+y^2}$; (b) $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{-y^3 \sin(2xy^3)}{1+\cos^2(xy^3)}$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{3xy^2 \sin(2xy^3)}{1+\cos^2(xy^3)}$;

(c) $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{x^2y-y^3-y-2x}{(1+x^2+y^2)^2}$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{xy^2-x^3-x-2y}{(1+x^2+y^2)^2}$;

(2) (a) $\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = \frac{1}{y}f'\left(\frac{x}{y}\right)$; $\frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = -\frac{x}{y^2}f'\left(\frac{x}{y}\right)$; (b) $\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = af'(ax+by)$; $\frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = bf'(ax+by)$;

(c) $\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = (y-2)f'(xy^2-2x)$; $\frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = xf'(xy^2-2x)$; (d) $\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = 2xf(e^{x^2+y^2})$; $\frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = 2yf(e^{x^2+y^2})$;
(3) -2;

(8) (a) $g_u = 2uf_x(u^2, v^3)$; $g_v = 3v^2f_y(u^2, v^3)$; (b) $g_u = \cos u - 2f_x(2u-3v^2, u-\cos v) - f_y(2u-3v^2, u-\cos v)$;
 $g_v = -6vf_x(2u-3v^2, u-\cos v) + \sin v f_y(2u-3v^2, u-\cos v)$;

(c) $g_u = \cos(u+v)f_x(\sin(u+v), \cos(u-v)) - \sin(u-v)f_y(\sin(u+v), \cos(u-v))$;

$g_v = \cos(u+v)f_x(\sin(u+v), \cos(u-v)) + \sin(u-v)f_y(\sin(u+v), \cos(u-v))$;

(d) $g_u = 2ue^{u^2}f_x(e^{u^2}, \ln(u+v)) + \frac{f_y(e^{u^2}, \ln(u+v))}{u+v}$; $g_v = \frac{f_y(e^{u^2}, \ln(u+v))}{u+v}$;

(10) (a) $\lambda = 2$; (b) $\lambda = -1$; (c) $\lambda = -1/3$; (d) $\lambda = -2$;

(11) (b) Não é contínua em $(0,0)$; (c) Não é diferenciável em $(0,0)$;

(12) (b) $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 1$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$; (c) Não; (d) Nenhuma das derivadas parciais é contínua em $(0,0)$.

(13) (b) Não; (14) (b) $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \begin{cases} \frac{4x^2y(x^2+y^2)^2 \cos((x^2+y^2)^2) - 2x^2y \sin((x^2+y^2)^2)}{(x^2+y^2)^2} & \text{se } (x, y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0,0). \end{cases}$

(c) Sim; (d) Sim.

(16) (a) f não é diferenciável em nenhum ponto da reta $y = -x$; (b) f não é diferenciável nos pontos da forma $(a,0)$ com $a \neq 0$; (c) f é diferenciável em \mathbb{R}^2 pois é de classe C^1 ; (d) Idem ao item (c).

(18) $-9600\pi \text{ cm}^3/\text{s}$; (18) $a = 3$; (21) (b) 21.

(22) (a) $\frac{\partial^2 F}{\partial r^2} = s^2 e^{2rs} \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} + 6r^2 e^{rs} s \cos s \frac{\partial^2 G}{\partial x \partial y} + 9r^4 \cos^2 s \frac{\partial^2 G}{\partial y^2} + s^2 e^{rs} \frac{\partial G}{\partial x} + 6r \cos s \frac{\partial G}{\partial y}$; (b) 0;

(23) (a) $z = 1$; $X = (0,0,1) + \lambda(0,0,1)$, $\lambda \in \mathbb{R}$; (b) $2x + y - z - 1 = 0$; $X = (-1,3,0) + \lambda(2,1,-1)$, $\lambda \in \mathbb{R}$;

(c) $6x - 4y + z + 5 = 0$; $X = (-3,-2,5) + \lambda(6,-4,1)$, $\lambda \in \mathbb{R}$; (d) $e^3y - z - e^3 = 0$; $X = (3,1,0) + \lambda(0,e^3,-1)$, $\lambda \in \mathbb{R}$;

(24) $6x - y - z + 6 = 0$; (25) $k = 8$;

(27) $a = -4$; (28) $(1,4)$; (29) $X = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right) + \lambda(-1,1)$, $\lambda \in \mathbb{R}$;

(30) (a) $\sqrt{5}, (1,2)$; (b) $\frac{2}{\sqrt{5}}, \left(\frac{1}{5}, \frac{2}{5}\right)$;

(31) f não é diferenciável em $(0,0)$; (32) $4/5$; (33) (d) Não; (35) $\pm \left(\sqrt{\frac{2}{3}}, -2\sqrt{\frac{2}{3}}, \sqrt{\frac{3}{3}}\right)$

(36) (a) $(-3,2)$ mínimo; (b) $(2/3,1), (-4/3,-1)$ selas; (c) $(0,\lambda)$ e $(\lambda,0)$ com $\lambda \in \mathbb{R}$ mínimos; (d) $(0,\lambda)$ e $(\lambda,0)$ com $\lambda \in \mathbb{R}$ selas; (e) $(4,4)$ máximo; (f) $(\pi/2 + k\pi, 0)$ com $k \in \mathbb{Z}$ selas; (g) $(1,1)$ máximo, $(0,0), (2,0), (0,2), (2,2)$ selas; (h) $(0,0)$ máximo, $(0,2)$ mínimo, $(0,-2), (\sqrt{3},1), (-\sqrt{3},1)$ selas; (i) $(0,0)$ sela, $\pm(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ máximos, $\pm(-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ mínimos; (j) $(1/3,0)$ mínimo; (k) $(2,1)$ e $(0,3)$ sela; $(2,3)$ mínimo e $(0,1)$ máximo;

(37) (a) pontos de máximo: $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2\sqrt{2}}\right)$ e $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)$; pontos de mínimo: $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2\sqrt{2}}\right)$ e $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)$. (b) ponto de máximo: $\left(\frac{1}{\sqrt{5}}, 1 - \frac{2}{\sqrt{5}}, 2 - \frac{4}{\sqrt{5}}\right)$; ponto de mínimo: $\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}, 1 + \frac{2}{\sqrt{5}}, 2 + \frac{4}{\sqrt{5}}\right)$. (c) ponto de máximo: $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}\right)$; ponto de mínimo: $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}\right)$. (d) ponto de mínimo: $\left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{6}, \frac{5}{6}\right)$; não tem ponto de máximo.

(38) a) $\sqrt{6}$; $(1,1,2)$; (b) $\sqrt{2}$; $(-1,1,0)$; (39) (a) $\frac{32}{3}$; (b) $(38,6,12)$; (c) $2\sqrt{406}$;

(40) (a) máximo: $f(4,5) = 13$, mínimo: $f(4,0) = -7$; (b) máximo: $f(0,0) = 0$, mínimo: $f(-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}) = -\frac{1}{2e}$; (c) máximo: $f(1,0) = 2$, mínimo: $f(-1,0) = -2$; (d) máximo: $f(2,0) = 4$, mínimo: $f(3, -\frac{\pi}{4}) = f(3, \frac{\pi}{4}) = f(1, -\frac{\pi}{4}) = f(1, \frac{\pi}{4}) = \frac{3\sqrt{2}}{2}$.

(41) (a) $\max f(2,2) = f(-2,-2) = 4$; $\min f(4,-4) = f(-4,4) = -16$; (b) $\max 2/\sqrt{3}$, $\min -2/\sqrt{3}$; (c) $\max 1/27$, $\min 0$; (d) $\max \sqrt{3}$, $\min 1$.

(43) (a) mínimo: $-2\sqrt{3}$ e máximo $2\sqrt{3}$; (b) mínimo: $\frac{1}{32} + \left(\frac{15}{16}\right)^2$ e máximo 1.

(44) (a) $(1,1)$ e $(-1,-1)$; (45) $(0,-1,2)$; (46) $n_1 = n_2 = n_3 = \frac{100}{3}$; (47) $\sqrt{12}$; (48) $(0,0,1)$ ou $(0,0,-1)$;

(49) (a) Se $b > 0$, temos 5 pontos críticos: $\left(\pm\sqrt{\frac{3}{b}}, 1\right)$ e $(0,-2)$ pontos de sela; $(0,-2)$ máximo local e $(0,2)$ mínimo local; e se $b < 0$, temos 3 pontos críticos: $(0,0)$ e $(0,2)$ pontos de sela; $(0,-2)$ mínimo local; (b) Pontos de máximo: $(-3,3)$ e $(3,3)$; ponto de mínimo. $(0,2)$;

(50) (b) $a > 1$: mínimo local; $-1 < a < 1$: sela; $a < -1$: máximo local; $a \geq 1$: $(0,0)$ é ponto de mínimo global; $a \leq -1$: $(0,0)$ é ponto de máximo global;

(51) Mais quentes: $\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}\right), \left(\frac{-1}{2}, \frac{-\sqrt{2}}{2}, \frac{-1}{2}\right)$; Mais frios: $\left(\frac{1}{2}, \frac{-\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}\right), \left(\frac{-1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{-1}{2}\right)$;

(52) O paralelepípedo tem vértices em $(\pm 1, \pm 1, 0)$ e $(\pm 1, \pm 1, 2)$; (53)

(53) $12(2 - \sqrt{3})$, $2(3 - \sqrt{3})$, $4(2\sqrt{3} - 3)$; (54) $x + y + 2z - 6 = 0$;

(55) $2^{2/5}x + 2^{9/10}y + 2^{9/10}z = 5$; $2^{2/5}x - 2^{9/10}y + 2^{9/10}z = 5$; (56) base $3\text{cm} \times 3\text{cm}$ e altura $1,5\text{cm}$.