UFPR - Universidade Federal do Paraná
Departamento de Matemática
CM042 - Cálculo II - Turma B
Prof. José Carlos Eidam

GABARITO DO EXAME FINAL - 13/01/2012

Questão 1 **(2 pontos)** Considere em $\mathbb{R}^2$ os campos de vetores

$$\vec{F}(x,y) = (y + 2xy\cos(x^2y))\vec{i} + (x + x^2\cos(x^2y))\vec{j}$$

e

$$\vec{G}(x,y) = (e^x + x^2y)\vec{i} + (e^y - xy^2)\vec{j}.$$

Calcule

$$\int_\gamma \vec{H}\cdot d\vec{r},$$

onde γ é o arco da circunferência $x^2 + y^2 = 1$ contido no primeiro quadrante, percorrido no sentido anti-horário e $\vec{H}(x,y) = \vec{F}(x,y) + \vec{G}(x,y)$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

Solução.
O campo $\vec{F}$ é conservativo e seus potenciais são da forma $f(x,y) = 2x^2 + xy + \sin(x^2y) + C$, $C \in \mathbb{R}$, logo $\int_\gamma \vec{F}\cdot d\vec{r} = f(0,1) - f(1,0) = -2$. O campo $\vec{G}$ não é conservativo, pois $Q_x - P_y = -x^2 - y^2$. Chamando de μ_1, μ_2 os segmentos de reta que unem os pontos $(0,0)$, $(0,1)$ e $(0,0)$, $(1,0)$, respectivamente, e de D a região delimitada por γ, μ_1 e μ_2, temos, pelo teorema de Green, que

$$\int_\gamma \vec{G}\cdot d\vec{r} - \int_{\mu_1} \vec{G}\cdot d\vec{r} + \int_{\mu_2} \vec{G}\cdot d\vec{r} = \iint_D (-x^2 - y^2)\,dx\,dy = -\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^1 r^2 r\,dr\,d\theta = -\frac{\pi}{8}.$$

Temos $\int_{\mu_1} \vec{G}\cdot d\vec{r} = \int_0^1 \vec{G}(0,t)\cdot(0,1)\,dt = \int_0^1 e^t\,dt = e - 1$ e $\int_{\mu_2} \vec{G}\cdot d\vec{r} = \int_0^1 \vec{G}(t,0)\cdot(1,0)\,dt = \int_0^1 e^t\,dt = e - 1$, logo, $\int_\gamma \vec{G}\cdot d\vec{r} = -\frac{\pi}{8}$, portanto,

$$\int_\gamma \vec{H}\cdot d\vec{r} = \int_\gamma \vec{F}\cdot d\vec{r} + \int_\gamma \vec{G}\cdot d\vec{r} = -2 - \frac{\pi}{8}.$$

∎

Questão 2 **(3 pontos)** Calcule o fluxo do campo

$$\vec{F}(x,y,z) = (x + \arctan z)\vec{i} + (y^2 + \ln(1 + z^{2012}))\vec{j} + (x^2 + y^2 - z)\vec{k}.$$

através da parte do parabolóide $z = 4 - x^2 - y^2$ acima do plano $z = 0$, orientada de forma que sua normal satisfaça a condição $\vec{N}\cdot\vec{k} > 0$.

Solução. Seja S_1 o círculo de raio 2 centrado na origem no plano xy orientado pela normal $\vec{N} = -\vec{k}$. Chamando de E a região delimitada por S e S_1 e aplicando o teorema da divergência, temos

$$\iint_S \vec{F}\cdot\vec{N}\,dS + \iint_{S_1} \vec{F}\cdot\vec{N}\,dS = \iiint_E \operatorname{div}\vec{F}(x,y,z)\,dx\,dy\,dz \iiint_E 2y\,dx\,dy\,dz = 0,$$

pela simetria. Como $\iint_{S_1} \vec{F} \cdot \vec{N}\, dS = \int_0^{2\pi} \int_0^2 (-r^2) r\, dr\, d\theta = -8\pi$, segue que

$$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{N}\, dS = 8\pi\,.$$

∎

Questão 3 **(2 pontos)** Seja S a parte da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ que está dentro do cilindro $x^2 + y^2 = 1$ e acima do plano xy. Calcule a massa e o centro de massa de S sabendo que sua densidade em um ponto (x, y, z) é $\delta(x, y, z) = z^3$.

Solução.

Uma parametrização para S é $\sigma(\phi,\theta) = (2\sin\phi\cos\theta, 2\sin\phi\sin\theta, 2\cos\phi)$, com $0 \le \theta \le 2\pi$ e $0 \le \phi \le \frac{\pi}{6}$. Nesta situação, temos $dS = 4\sin\phi\, d\phi\, d\theta$. Assim,

$$m = \iint_S \delta\, dS = \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{6}} (2\cos\phi)^3 4\sin\phi\, d\phi\, d\theta = 64\pi \int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos^3\phi \sin\phi\, d\phi = 7\pi\,.$$

Por simetria, o centro de massa tem coordenadas $(0, 0, \bar{z})$, onde

$$m\bar{z} = \iint_S z\delta\, dS = \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{6}} (2\cos\phi)^4 4\sin\phi\, d\phi\, d\theta = 128\pi \int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos^4\phi \sin\phi\, d\phi = \frac{4\pi}{5}(32 - 9\sqrt{3})\,,$$

logo, $\bar{z} = \frac{4}{35}(32 - 9\sqrt{3})$.

∎

Questão 4 **(3 pontos)** Calcule o fluxo do campo de vetores

$$\vec{F}(x, y, z) = \frac{x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} + z^3\vec{k},\ \ (x, y, z) \neq (0, 0, 0)\,,$$

através do elipsóide S de equação $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{16} = 1$ orientado pela normal exterior.

Solução.

Chamando de $\vec{G}, \vec{H}$ a primeira e segunda parcelas do campo $\vec{F}$, respectivamente, já observamos em aula que $\iint_S \vec{G} \cdot \vec{N}\, dS = 4\pi$. Para calcular o fluxo de $\vec{H}$ através de S, podemos usar o teorema da divergência, chamando de E a região delimitada por S:

$$\iint_S \vec{H} \cdot \vec{N}\, dS = \iiint_E 3z^2\, dx\, dy\, dz = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^1 3(4r\cos\phi)^2 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot r^2 \sin\phi\, dr\, d\phi\, d\theta = \frac{1536\pi}{5}\,.$$

Assim,

$$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{N}\, dS = \iint_S \vec{G} \cdot \vec{N}\, dS + \iint_S \vec{H} \cdot \vec{N}\, dS = 4\pi + \frac{1536\pi}{5} = \frac{1556\pi}{5}\,.$$

∎