UFPR - Universidade Federal do Paraná
Departamento de Matemática
CM042 - Cálculo II - Turma B
Prof. José Carlos Eidam

GABARITO DA PRIMEIRA PROVA - PROVA TIPO A - 28/09/2011

Questão 1 Considere a curva $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ dada por $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, onde $x(t) = 2t^3 + 3t^2 - 12t$ e $y(t) = 2t^3 + 3t^2 + 1$.

(a) **(2 pontos)** Estude o crescimento/decrescimento de $x(t)$ e $y(t)$ e o sinal de $\frac{d^2y}{dx^2}$.

Solução. Temos que $x'(t) = 6(t^2 + t - 2) = 6(t-1)(t+2)$, $y'(t) = 6(t^2 + t) = 6t(t+1)$ e

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{1}{3}\frac{2t+1}{(t-1)^3(t+2)^3}.$$

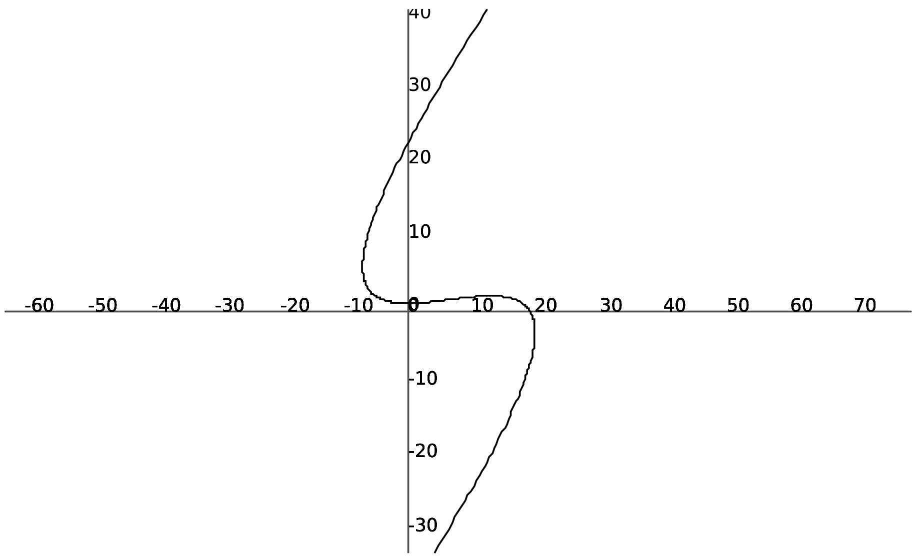
Assim $x(t)$ é decrescente em $(-2, 1)$ e crescente fora de $(-2, 1)$ e $y(t)$ é decrescente em $(-1, 0)$ e crescente fora de $(-1, 0)$. Já $\frac{d^2y}{dx^2}$ é positiva em $(-\infty, -2) \cup (-1/2, 1)$ e negativa fora deste conjunto. Assim, a tabela que usamos para desenhar o traço de γ é:

	$(-\infty, -2)$	$(-2, -1)$	$(-1, -1/2)$	$(-1/2, 0)$	$(0, 1)$	$(1, \infty)$
x	$\uparrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\uparrow$
y	$\uparrow$	$\uparrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\uparrow$	$\uparrow$
d^2y/dx^2	$\smile$	$\frown$	$\frown$	$\smile$	$\smile$	$\frown$

∎

(b) **(2 pontos)** Faça um esboço da imagem (ou traço) de γ indicando seu sentido de percurso e os pontos em que ocorrem possíveis mudanças de concavidade.

Solução. Usando o quadro construído no ítem anterior, vemos que o traço de γ é



A concavidade de γ muda nos pontos $\gamma(-2) = (20, -3)$, $\gamma(-1/2) = (13/2, 3/2)$ e $\gamma(1) = (-7, 6)$. ∎

Questão 2 **(2 pontos)** Considere a curva γ dada em coordenadas polares pela equação $r = 2\cos\theta$, $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$. Encontre uma parametrização para γ em coordenadas *cartesianas*, calcule seu comprimento e esboce seu traço.

Solução. Basta observar que $x = r\cos\theta = 2\cos^2\theta$ e $y = r\text{sen}\theta = \text{sen}(2\theta)$, assim a curva admite a parametrização

$$\gamma(\theta) = (2\cos^2\theta, \text{sen}(2\theta)),\ -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}.$$

Temos que $\gamma'(\theta) = (-2\text{sen}(2\theta), 2\cos(2\theta))$, e portanto, $|\gamma'(\theta)| = 2$, para todo $\theta \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Assim, o comprimento de γ é dado por

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} |\gamma'(\theta)| d\theta = 2\pi.$$

Para esboçar o traço de γ, basta observar que $\frac{r}{2} = \cos\theta = \frac{x}{r}$, assim, $r^2 = 2x$, logo, $x^2 + y^2 = 2x$ e, portanto,

$$(x-1)^2 + y^2 = 1.$$

Logo, o traço de γ é uma circunferência de raio 1 centrada no ponto $(1,0)$, percorrida no sentido anti-horário.

Esta mesma conclusão pode ser obtida fazendo cálculos semelhantes aos da questão anterior, i.e., considerando $x'(\theta), y'(\theta)$ e d^2y/dx^2. ∎

Questão 3 (a) **(2 pontos)** Calcule, ou justifique porque não existe, o limite abaixo

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4 y}{y^3 - 2x^6}.$$

Solução. Pondo $\gamma_1(t) = (t,0)$ e $f(x,y) = \frac{x^2 y}{x^4 - y^2}$, temos que $\lim_{t\to 0} f(\gamma_1(t)) = 0$. Pondo $\gamma_2(t) = (t, t^2)$, temos que $\lim_{t\to 0} f(\gamma_2(t)) = -1$, portanto, o limite não existe. ∎

(b) **(2 pontos)** Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{5x^4\sqrt{x} - 7\text{sen}(x^4+y^4)}{2x^4+2y^4} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ a & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases},$$

onde a é um número real. Determine o valor de a para que f seja uma função contínua em $\mathbb{R}^2$.

Solução. Vemos que

$$\frac{5x^4\sqrt{x} - 7\text{sen}(x^4+y^4)}{2x^4+2y^4} = \frac{5}{2}\sqrt{x}\frac{x^4}{x^4+y^4} - \frac{7}{2}\frac{\text{sen}(x^4+y^4)}{x^4+y^4}.$$

A primeira parcela da soma acima tem limite zero quando $(x,y) \to (0,0)$, pois $\left|\frac{x^4}{x^4+y^4}\right| \leq 1$ e $\lim_{x\to 0}\sqrt{x} = 0$. Para analisar a segunda parcela, podemos fazer $u = x^4 + y^4$ e observar que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\text{sen}(x^4+y^4)}{x^4+y^4} = \lim_{u\to 0^+} \frac{\text{sen}\,u}{u} = 1.$$

Assim, $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = -\frac{7}{2}$, portanto, para que f seja contínua em $(0,0)$, devemos ter $a = -\frac{7}{2}$.

∎