UFPR - Universidade Federal do Paraná
Departamento de Matemática
CM042 - Cálculo II - Turma B
Prof. José Carlos Eidam

GABARITO DA PRIMEIRA PROVA - PROVA TIPO B - 28/09/2011

Questão 1 Considere a curva $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ dada por $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, onde $x(t) = 2t^3 + 3t^2 - 12t$ e $y(t) = -2t^3 - 3t^2 - 1$.

(a) **(2 pontos)** Estude o crescimento/decrescimento de $x(t)$ e $y(t)$ e o sinal de $\frac{d^2y}{dx^2}$.

Solução. Temos que $x'(t) = 6(t^2 + t - 2) = 6(t-1)(t+2)$, $y'(t) = -6(t^2 + t) = -6t(t+1)$ e

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{3}\frac{2t+1}{(t-1)^3(t+2)^3}.$$

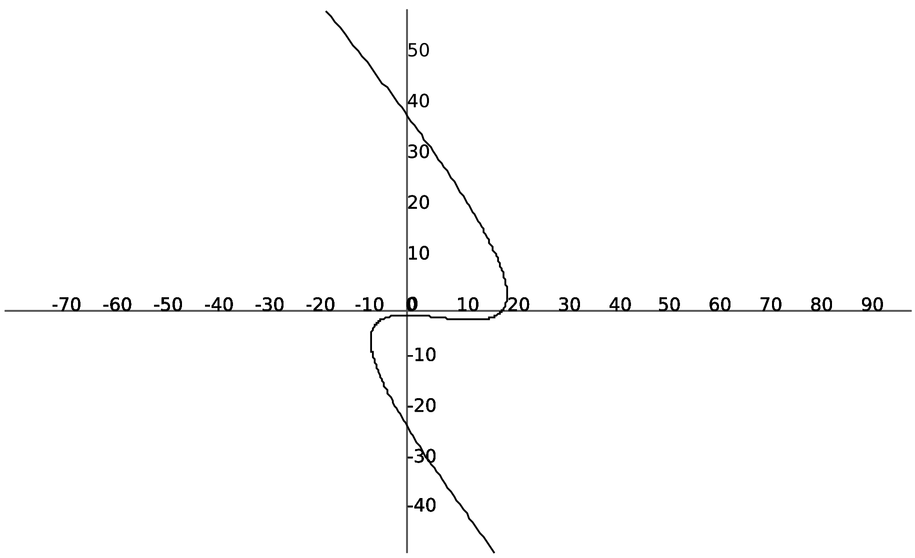
Assim $x(t)$ é decrescente em $(-2,1)$ e crescente fora de $(-2,1)$ e $y(t)$ é crescente em $(-1,0)$ e decrescente fora de $(-1,0)$. Já $\frac{d^2y}{dx^2}$ é negativa em $(-\infty,-2) \cup (-1/2,1)$ e positiva fora deste conjunto. Assim, a tabela que usamos para desenhar o traço de γ é:

	$(-\infty,-2)$	$(-2,-1)$	$(-1,-1/2)$	$(-1/2,0)$	$(0,1)$	$(1,\infty)$
x	$\uparrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\uparrow$
y	$\downarrow$	$\downarrow$	$\uparrow$	$\uparrow$	$\downarrow$	$\downarrow$
d^2y/dx^2	$\frown$	$\smile$	$\smile$	$\frown$	$\frown$	$\smile$

∎

(b) **(2 pontos)** Faça um esboço da imagem (ou traço) de γ indicando seu sentido de percurso e os pontos em que ocorrem possíveis mudanças de concavidade.

Solução. Usando o quadro construído no ítem anterior, vemos que o traço de γ é



A concavidade de γ muda nos pontos $\gamma(-2) = (20,3)$, $\gamma(-1/2) = (13/2,-3/2)$ e $\gamma(1) = (-7,-6)$. ∎

Questão 2 **(2 pontos)** Considere a curva γ dada em coordenadas polares pela equação $r = 2\text{sen}\theta$, com $0 \le \theta \le \pi$. Encontre uma parametrização para γ em coordenadas *cartesianas*, calcule seu comprimento e esboce seu traço.

Solução. Basta observar que $x = r\cos\theta = \text{sen}(2\theta)$ e $y = r\text{sen}\theta = 2\text{sen}^2\theta$, assim a curva admite a parametrização

$$\gamma(\theta) = (\text{sen}(2\theta), 2\text{sen}^2\theta)\,,\ -\pi \le \theta \le \pi\,.$$

Temos que $\gamma'(\theta) = (2\cos(2\theta), 2\text{sen}(2\theta))$, e portanto, $|\gamma'(\theta)| = 2$, para todo $\theta \in (0,\pi)$. Assim, o comprimento de γ é dado por

$$\int_0^\pi |\gamma'(\theta)|d\theta = 2\pi\,.$$

Para esboçar o traço de γ, basta observar que $\frac{r}{2} = \text{sen}\theta = \frac{y}{r}$, assim, $r^2 = 2y$, logo, $x^2 + y^2 = 2y$ e, portanto,

$$x^2 + (y-1)^2 = 1\,.$$

Logo, o traço de γ é uma circunferência de raio 1 centrada no ponto $(0,1)$, percorrida no sentido anti-horário.

Esta mesma conclusão pode ser obtida fazendo cálculos semelhantes aos da questão anterior, i.e., considerando $x'(\theta), y'(\theta)$ e d^2y/dx^2. ∎

Questão 3 (a) **(2 pontos)** Calcule, ou justifique porque não existe, o limite abaixo

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^4}{x^3 - 2y^6}\,.$$

Solução. Pondo $\gamma_1(t) = (t,0)$ e $f(x,y) = \frac{xy^4}{x^3-2y^6}$, temos que $\lim_{t\to 0} f(\gamma_1(t)) = 0$. Pondo $\gamma_2(t) = (t^2, t)$, temos que $\lim_{t\to 0} f(\gamma_2(t)) = -1$, portanto, o limite não existe.

∎

(b) **(2 pontos)** Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{4x^4\sqrt{x} - 8\text{sen}(x^4+y^4)}{3x^4+3y^4} & \text{se } (x,y) \ne (0,0) \\ a & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}\,,$$

onde a é um número real. Determine o valor de a para que f seja uma função contínua em $\mathbb{R}^2$.

Solução.

Vemos que

$$\frac{4x^4\sqrt{x} - 8\text{sen}(x^4+y^4)}{3x^4+3y^4} = \frac{4}{3}\sqrt{x}\frac{x^4}{x^4+y^4} - \frac{8}{3}\frac{\text{sen}(x^4+y^4)}{x^4+y^4}\,.$$

A primeira parcela da soma acima tem limite zero quando $(x,y) \to (0,0)$, pois $\left|\frac{x^4}{x^4+y^4}\right| \le 1$ e $\lim_{x\to 0}\sqrt{x} = 0$. Para analisar a segunda parcela, podemos fazer $u = x^4 + y^4$ e observar que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\text{sen}(x^4+y^4)}{x^4+y^4} = \lim_{u\to 0^+} \frac{\text{sen}\,u}{u} = 1\,.$$

Assim, $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = -\frac{8}{3}$, portanto, para que f seja contínua em $(0,0)$, devemos ter $a = -\frac{8}{3}$.

∎