

GABARITO DA PRIMEIRA PROVA - PROVA TIPO C - 28/09/2011

Questão 1 Considere a curva $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, onde $x(t) = -2t^3 - 3t^2 + 12t$ e $y(t) = 2t^3 + 3t^2 + 1$.

(a) **(2 pontos)** Estude o crescimento/decrescimento de $x(t)$ e $y(t)$ e o sinal de $\frac{d^2y}{dx^2}$.

Solução. Temos que $x'(t) = -6(t^2 + t - 2) = -6(t - 1)(t + 2)$, $y'(t) = 6(t^2 + t) = 6t(t + 1)$ e

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{1}{3} \frac{2t + 1}{(t - 1)^3(t + 2)^3}.$$

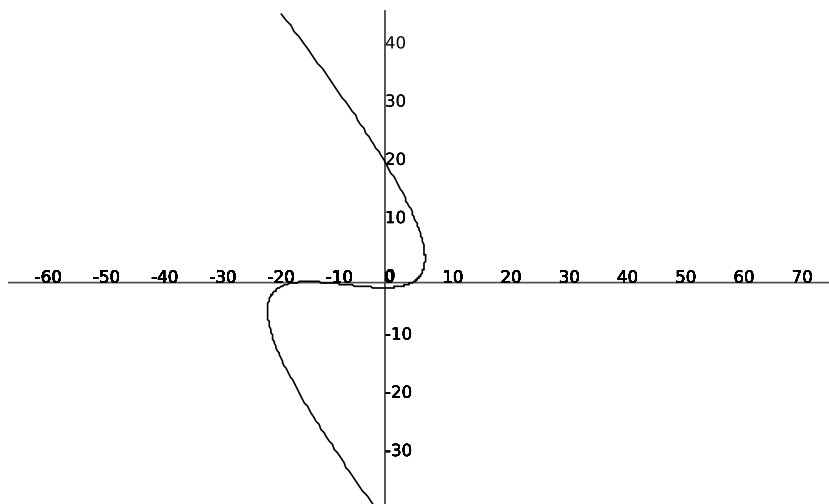
Assim $x(t)$ é crescente em $(-2, 1)$ e decrescente fora de $(-2, 1)$ e $y(t)$ é decrescente em $(-1, 0)$ e crescente fora de $(-1, 0)$. Já $\frac{d^2y}{dx^2}$ é positiva em $(-\infty, -2) \cup (-1/2, 1)$ e negativa fora deste conjunto. Assim, a tabela que usamos para desenhar o traço de γ é:

	$(-\infty, -2)$	$(-2, -1)$	$(-1, -1/2)$	$(-1/2, 0)$	$(0, 1)$	$(1, \infty)$
x	↓	↑	↑	↑	↑	↓
y	↑	↑	↓	↓	↑	↑
d^2y/dx^2	⌋	⌋	⌋	⌋	⌋	⌋

■

(b) **(2 pontos)** Faça um esboço da imagem (ou traço) de γ indicando seu sentido de percurso e os pontos em que ocorrem possíveis mudanças de concavidade.

Solução. Usando o quadro construído no ítem anterior, vemos que o traço de γ é



A concavidade de γ muda nos pontos $\gamma(-2) = (-20, -3)$, $\gamma(-1/2) = (-13/2, 3/2)$ e $\gamma(1) = (7, 6)$. ■

Questão 2 (2 pontos) Considere a curva γ dada em coordenadas polares pela equação $r = 2\text{sen}\theta$, com $0 \leq \theta \leq \pi$. Encontre uma parametrização para γ em coordenadas *cartesianas*, calcule seu comprimento e esboce seu traço.

Solução. Basta observar que $x = r \cos \theta = \text{sen}(2\theta)$ e $y = r \text{sen} \theta = 2\text{sen}^2 \theta$, assim a curva admite a parametrização

$$\gamma(\theta) = (\text{sen}(2\theta), 2\text{sen}^2 \theta), \quad -\pi \leq \theta \leq \pi.$$

Temos que $\gamma'(\theta) = (2 \cos(2\theta), 2\text{sen}(2\theta))$, e portanto, $|\gamma'(\theta)| = 2$, para todo $\theta \in (0, \pi)$. Assim, o comprimento de γ é dado por

$$\int_0^\pi |\gamma'(\theta)| d\theta = 2\pi.$$

Para esboçar o traço de γ , basta observar que $\frac{r}{2} = \text{sen} \theta = \frac{y}{r}$, assim, $r^2 = 2y$, logo, $x^2 + y^2 = 2y$ e, portanto,

$$x^2 + (y - 1)^2 = 1.$$

Logo, o traço de γ é uma circunferência de raio 1 centrada no ponto $(0, 1)$, percorrida no sentido anti-horário.

Esta mesma conclusão pode ser obtida fazendo cálculos semelhantes aos da questão anterior, i.e., considerando $x'(\theta)$, $y'(\theta)$ e d^2y/dx^2 . ■

Questão 3 (a) (2 pontos) Calcule, ou justifique porque não existe, o limite abaixo

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy^2}{x^2 - 7y^4}.$$

Solução. Pondo $\gamma_1(t) = (t, 0)$ e $f(x, y) = \frac{xy^2}{x^2 - 7y^4}$, temos que $\lim_{t \rightarrow 0} f(\gamma_1(t)) = 0$. Pondo $\gamma_2(t) = (t^2, t)$, temos que $\lim_{t \rightarrow 0} f(\gamma_2(t)) = -1/6$, portanto, o limite não existe. ■

(b) **(2 pontos)** Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{7x^4 \sqrt{x} - 9\text{sen}(x^4 + y^4)}{4x^4 + 4y^4} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ a & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases},$$

onde a é um número real. Determine o valor de a para que f seja uma função contínua em \mathbb{R}^2 .

Solução. Vemos que

$$\frac{7x^4 \sqrt{x} - 9\text{sen}(x^4 + y^4)}{4x^4 + 4y^4} = \frac{7}{4} \sqrt{x} \frac{x^4}{x^4 + y^4} - \frac{9}{4} \frac{\text{sen}(x^4 + y^4)}{x^4 + y^4}.$$

A primeira parcela da soma acima tem limite zero quando $(x, y) \rightarrow (0, 0)$, pois $\left| \frac{x^4}{x^4 + y^4} \right| \leq 1$ e $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x} = 0$. Para analisar a segunda parcela, podemos fazer $u = x^4 + y^4$ e observar que

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\text{sen}(x^4 + y^4)}{x^4 + y^4} = \lim_{u \rightarrow 0^+} \frac{\text{sen} u}{u} = 1.$$

Assim, $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = -\frac{9}{4}$, portanto, para que f seja contínua em $(0,0)$, devemos ter $a = -\frac{9}{4}$.

■