UFPR - Universidade Federal do Paraná
Departamento de Matemática
CM042 - Cálculo II - Turma B
Prof. José Carlos Eidam

GABARITO DA SEGUNDA PROVA - TIPO A - 24/10/2011

Questão 1 Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ a função dada por

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{y^2 \sin x}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0)\,. \end{cases}$$

(a) **(2 pontos)** Calcule as derivadas parciais $f_x(x,y)$ e $f_y(x,y)$ para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. f é de classe C^1 em $\mathbb{R}^2$?

Solução. Temos que

$$f_x(x,y) = \begin{cases} \frac{y^2 \cos x}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{xy^2 \sin x}{(x^2+y^2)^{3/2}} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

e

$$f_y(x,y) = \begin{cases} \frac{2y \sin x}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{y^3 \sin x}{(x^2+y^2)^{3/2}} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Como $f_x(x,y) = y\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\cos x - \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{y^2}{x^2+y^2}\sin x$ e $f_y(x,y) = 2\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\sin x - \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{y^2}{x^2+y^2}\sin x$, vemos que f_x e f_y são contínuas em todos os pontos de $\mathbb{R}^2$. ∎

(b) **(2 pontos)** Determine o conjunto dos pontos nos quais f é diferenciável.

Solução. Como as derivadas parciais de f são contínuas em todos os pontos de $\mathbb{R}^2$, segue, pelo teorema visto em aula que f é diferenciável em todos os pontos de $\mathbb{R}^2$.

Podemos chegar à esta conclusão também sem saber que f é de classe C^1. Basta observar que as derivadas parciais são contínuas fora da origem, portanto, f é diferenciável fora da origem. Para ver se f é diferenciável na origem, observamos que

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(h,k) - f(0,0) - f_x(0,0)h - f_y(0,0)k}{\sqrt{h^2+k^2}} = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{k^2}{h^2+k^2}\sin h = 0\,,$$

Logo, f é diferenciável também na origem, e portanto, é diferenciável em todos os pontos de $\mathbb{R}^2$.

∎

Questão 2 Seja $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 2,\ 0 \leq y \leq 2\}$ e considere a função $f : D \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x,y) = x^4 + y^4 - 2x^2 - 4y\,.$$

(a) **(2 pontos)** Determine, se existirem, o(s) ponto(s) crítico(s) de f no interior de D e classifique-os como máximo local, mínimo local ou sela.

Solução. Temos que $f_x(x,y) = 4x(x^2-1)$, $f_y(x,y) = 4(y^3-1)$, $f_{xx}(x,y) = 12x^2-4$, $f_{xy}(x,y) = 0$ e $f_{yy}(x,y) = 12y^2$. Os pontos críticos de f satisfazem as equações $4x(x^2-1) = 0 = 4(y^3-1)$. Assim, os pontos críticos de f no interior de D são $P_1 = (0,1)$ e $P_2 = (1,1)$. Se $H(x,y)$ denota a matriz hessiana em (x,y), temos que $\det H(x,y) = 48(3x^2-1)y^2$. Como $\det H(P_1) = -48 < 0$, temos que P_1 é um ponto de sela. Como $\det H(P_2) = 96 > 0$ e $f_{xx}(P_2) = 8 > 0$, segue que P_2 é um ponto de mínimo local. ∎

(b) **(2 pontos)** Determine os pontos de máximo e mínimo globais de f e os respectivos valores máximo e mínimo de f.

Solução. A fronteira de D é formada pelos segmentos D_1, D_2, D_3, D_4, dados pela intersecção de D com as retas $y = 0$, $x = 2$, $y = 2$ e $x = 0$, respectivamente. Analisaremos cada um destas partes separadamente.

$\underline{D_1}$**:** Como $f(x,0) = x^4 - 2x^2$, podemos derivar esta última expressão para concluir que os possíveis extremantes de f em D_1 são $P_3 = (0,0)$ e $P_4 = (1,0)$. Devemos, como é de praxe, incluir o extremo do intervalo $P_5 = (2,0)$ na nossa lista de possíveis extremantes.

$\underline{D_4}$**:** Temos que $f(0,y) = y^4 - 4y$; derivando e igualando a zero, obtemos o ponto $P_6 = (0,1)$; tomemos $P_7 = (0,2)$.

$\underline{D_2}$**:** Como $f(2,y) = y^4 - 4y + 8$, o mesmo cálculo acima nos fornece os pontos $P_8 = (2,1)$ e $P_9 = (2,2)$ como possíveis extremantes.

$\underline{D_3}$**:** O mesmo cálculo feito para D_1 nos fornece o ponto $P_{10} = (2,1)$ como possível extremante.

Como

P	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7	P_8	P_9	P_{10}
f(P)	-3	-4	0	-1	8	-3	8	5	16	5

e o conjunto D é fechado e limitado, concluímos que os pontos de máximo e mínimo global de f são $P_9 = (2,2)$ e $P_2 = (1,1)$ e os valores máximo e mínimo de f são 16 e -4, respectivamente.

∎

Questão 3 **(2 pontos)** Determine as dimensões do maior paralelepídedo com arestas paralelas aos eixos coordenados que pode ser inscrito no elipsóide

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{16} = 1\,.$$

Solução. Como o elipsóide acima é simétrico em relação à origem e aos eixos coordenados, vemos que o paralelepípedo procurado é simétrico em relação aos planos coordenados. Assim, o problema trata-se de encontrar o máximo da função $f(x,y,z) = xyz$ sujeita à restrição $G(x,y,z) = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{16} = 1$, $x, y, z \geq 0$. O método dos multiplicadores de Lagrange nos mostra que, em um ponto (x,y) de máximo ou mínimo de f sobre o elipsóide, devemos ter $\nabla f(x,y) = \lambda \nabla G(x,y)$, ou seja, $(yz, xz, xy) =$

$\lambda(\frac{x}{2}, \frac{2y}{9}, \frac{z}{8})$. Isso nos leva ao sistema

$$\begin{cases} yz = \frac{\lambda x}{2} \\ xz = \frac{2\lambda y}{9} \\ xy = \frac{\lambda z}{8} \\ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{16} = 1\,. \end{cases}$$

Podemos supor que $xyz > 0$ e isolar λ nas três primeiras equações, obtendo

$$\frac{2yz}{x} = \frac{9xz}{2y} = \frac{8xy}{z}\,.$$

Desta última equação, obtemos $y = \frac{3}{2}x$ e $z = 2x$. Substituindo na quarta equação, concluímos que $(x, y, z) = (\frac{2}{\sqrt{3}}, \sqrt{3}, \frac{4}{\sqrt{3}})$. Assim, as dimensões que maximizam o volume do paralelepípedo são

$$\frac{4}{\sqrt{3}}\,,\ 2\sqrt{3}\,,\ \frac{8}{\sqrt{3}}\,.$$

∎