

GABARITO DA SEGUNDA PROVA - TIPO B - 24/10/2011

Questão 1 Seja $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ a função dada por

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 \sin y}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

- (a) (2 pontos) Calcule as derivadas parciais $f_x(x, y)$ e $f_y(x, y)$ para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. f é de classe C^1 em \mathbb{R}^2 ?

Solução. Temos que

$$f_x(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 \cos y}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{yx^2 \sin y}{(x^2+y^2)^{3/2}} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

e

$$f_y(x, y) = \begin{cases} \frac{2x \sin y}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{x^3 \sin y}{(x^2+y^2)^{3/2}} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Como $f_x(x, y) = x \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \cos y - \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \frac{x^2}{x^2+y^2} \sin y$ e $f_y(x, y) = 2 \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \sin y - \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \frac{x^2}{x^2+y^2} \sin y$, vemos que f_x e f_y são contínuas em todos os pontos de \mathbb{R}^2 . ■

- (b) (2 pontos) Determine o conjunto dos pontos nos quais f é diferenciável.

Solução. Como as derivadas parciais de f são contínuas em todos os pontos de \mathbb{R}^2 , segue, pelo teorema visto em aula que f é diferenciável em todos os pontos de \mathbb{R}^2 .

Podemos chegar à esta conclusão também sem saber que f é de classe C^1 . Basta observar que as derivadas parciais são contínuas fora da origem, portanto, f é diferenciável fora da origem. Para ver se f é diferenciável na origem, observamos que

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{f(h, k) - f(0, 0) - f_x(0, 0)h - f_y(0, 0)k}{\sqrt{h^2 + k^2}} = \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{h^2}{h^2 + k^2} \sin k = 0,$$

Logo, f é diferenciável também na origem, e portanto, é diferenciável em todos os pontos de \mathbb{R}^2 . ■

Questão 2 (2 pontos) Determine as dimensões do maior paralelepípedo com arestas paralelas aos eixos coordenados que pode ser inscrito no elipsóide

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{16} = 1.$$

Solução. Como o elipsóide acima é simétrico em relação à origem e aos eixos coordenados, vemos que o paralelepípedo procurado é simétrico em relação aos planos coordenados. Assim, o problema trata-se de encontrar o máximo da função $f(x, y, z) = xyz$ sujeita à restrição $G(x, y, z) = \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{16} = 1$, $x, y, z \geq 0$. O método dos multiplicadores de Lagrange nos mostra que, em um ponto (x, y) de máximo ou mínimo de f sobre o elipsóide, devemos ter $\nabla f(x, y) = \lambda \nabla G(x, y)$, ou seja, $(yz, xz, xy) = \lambda(\frac{2x}{9}, \frac{y}{2}, \frac{z}{8})$. Isso nos leva ao sistema

$$\begin{cases} yz = \frac{2\lambda x}{9} \\ xz = \frac{\lambda y}{2} \\ xy = \frac{\lambda z}{8} \\ \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{16} = 1. \end{cases}$$

Podemos supor que $xyz > 0$ e isolar λ nas três primeiras equações, obtendo

$$\frac{2xz}{y} = \frac{9yz}{2x} = \frac{8xy}{z}.$$

Desta última equação, obtemos $y = \frac{2}{3}x$ e $z = \frac{4}{3}x$. Substituindo na quarta equação, concluímos que $(x, y, z) = (\sqrt{3}, \frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{4}{\sqrt{3}})$. Assim, as dimensões que maximizam o volume do paralelepípedo são

$$2\sqrt{3}, \frac{4}{\sqrt{3}}, \frac{8}{\sqrt{3}}.$$

■

Questão 3 Seja $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 2\}$ e considere a função $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x, y) = x^4 + y^4 - 2x^2 - 4y.$$

- (a) **(2 pontos)** Determine, se existirem, o(s) ponto(s) crítico(s) de f no interior de D e classifique-os como máximo local, mínimo local ou sela.

Solução. Temos que $f_x(x, y) = 4x(x^2 - 1)$, $f_y(x, y) = 4(y^3 - 1)$, $f_{xx}(x, y) = 12x^2 - 4$, $f_{xy}(x, y) = 0$ e $f_{yy}(x, y) = 12y^2$. Os pontos críticos de f satisfazem as equações $4x(x^2 - 1) = 0 = 4(y^3 - 1)$. Assim, os pontos críticos de f no interior de D são $P_1 = (0, 1)$ e $P_2 = (1, 1)$. Se $H(x, y)$ denota a matriz hessiana em (x, y) , temos que $\det H(x, y) = 48(3x^2 - 1)y^2$. Como $\det H(P_1) = -48 < 0$, temos que P_1 é um ponto de sela. Como $\det H(P_2) = 96 > 0$ e $f_{xx}(P_2) = 8 > 0$, segue que P_2 é um ponto de mínimo local.

■

- (b) **(2 pontos)** Determine os pontos de máximo e mínimo globais de f e os respectivos valores máximo e mínimo de f .

Solução. A fronteira de D é formada pelos segmentos D_1, D_2, D_3, D_4 , dados pela intersecção de D com as retas $y = 0$, $x = 2$, $y = 2$ e $x = 0$, respectivamente. Analisaremos cada um destas partes separadamente.

D_1 : Como $f(x, 0) = x^4 - 2x^2$, podemos derivar esta última expressão para concluir que os possíveis extremantes de f em D_1 são $P_3 = (0, 0)$ e $P_4 = (1, 0)$. Devemos, como é de praxe, incluir o extremo do intervalo $P_5 = (2, 0)$ na nossa lista de possíveis extremantes.

D_4 : Temos que $f(0, y) = y^4 - 4y$; derivando e igualando a zero, obtemos o ponto $P_6 = (0, 1)$; tomemos $P_7 = (0, 2)$.

D_2 : Como $f(2, y) = y^4 - 4y + 8$, o mesmo cálculo acima nos fornece os pontos $P_8 = (2, 1)$ e $P_9 = (2, 2)$ como possíveis extremantes.

D_3 : O mesmo cálculo feito para D_1 nos fornece o ponto $P_{10} = (2, 1)$ como possível extremante.

Como

P	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7	P_8	P_9	P_{10}
f(P)	-3	-4	0	-1	8	-3	8	5	16	5

e o conjunto D é fechado e limitado, concluímos que os pontos de máximo e mínimo global de f são $P_9 = (2, 2)$ e $P_2 = (1, 1)$ e os valores máximo e mínimo de f são 16 e -4 , respectivamente.

■