UFPR - Universidade Federal do Paraná
Departamento de Matemática
CM042 - Cálculo II - Turma B
Prof. José Carlos Eidam

GABARITO DA TERCEIRA PROVA - TIPO A - 25/11/2011

Questão 1 Considere em $\mathbb{R}^2$ o campo vetorial

$$\vec{F}_1(x,y) = \left(\cos(y^2) - 2e^y + x\right)\vec{i} + \left(-2xy\sin(y^2) - 2xe^y\right)\vec{j}\,.$$

(a) **(2 pontos)** O campo $\vec{F}_1$ é conservativo? Se sim, determine um potencial para $\vec{F}_1$.

Solução.

Chamando de P e Q a primeira e a segunda coordenadas de $\vec{F}_1$, respectivamente, temos que $Q_x = -2y\sin(y^2) - 2e^y = P_y$. Como o domínio de $\vec{F}_1$ é todo o plano (não tem *buracos*), segue que $\vec{F}_1$ é conservativo. Para achar um potencial f para $\vec{F}_1$, devemos resolver o sistema

$$\begin{cases} f_x &= \cos(y^2) - 2e^y + x \\ f_y &= -2xy\sin(y^2) - 2xe^y \end{cases}.$$

As soluções deste sistema são da forma

$$f(x,y) = x\cos(y^2) - 2xe^y + \frac{x^2}{2} + C\,,$$

onde $C \in \mathbb{R}$ é constante.

∎

(b) **(2 pontos)** Considere os campos $\vec{F}_2(x,y) = \frac{-y}{x^2+y^2}\vec{i} + \frac{x}{x^2+y^2}\vec{j}$, $\vec{F}_3(x,y) = \frac{-(y-1)}{(x-1)^2+(y-1)^2}\vec{i} + \frac{x-1}{(x-1)^2+(y-1)^2}\vec{j}$, $\vec{G}(x,y) = \vec{F}_1(x,y) + \vec{F}_2(x,y) + \vec{F}_3(x,y)$ e γ a circunferência de raio 5 e centro na origem orientada no sentido horário. Calcule

$$\oint_\gamma \vec{G}\cdot d\vec{r}\,.$$

Solução.

Como $\vec{F}_1$ é conservativo, temos que $\oint_\gamma \vec{F}_1 \cdot d\vec{r} = 0$. Decorre do teorema de Green que $\oint_\gamma \vec{G}\cdot d\vec{r} = -\oint_{\gamma_2} \vec{F}_2 \cdot d\vec{r} - \oint_{\gamma_3} \vec{G}\cdot d\vec{r}$, onde γ_2, γ_3 são as circunferências de raio 1 centradas nos pontos $(0,0)$ e $(1,1)$, respectivamente, orientadas no sentido anti-horário. Logo,

$$\oint_\gamma \vec{G}\cdot d\vec{r} = -\oint_{\gamma_2} \vec{F}_2 \cdot d\vec{r} - \oint_{\gamma_3} \vec{F}_3 \cdot d\vec{r} = -2\pi - 2\pi = -4\pi\,.$$

∎

Questão 2 Considere o sólido S **exterior** ao cone $z = \sqrt{3x^2+3y^2}$, $z \geq 0$, e **interior** ao hemisfério norte da esfera $x^2+y^2+z^2=4$, cuja densidade no ponto (x,y,z) é $\delta(x,y,z) = z\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

(a) **(2 pontos)** Calcule a massa de S.

Solução.

Vamos utilizar coordenadas esféricas para descrever a região e calcular sua massa. O cone dado é descrito em coordenadas esféricas como $r\cos\phi = \sqrt{3(r\sin\phi\cos\theta)^2 + 3(r\sin\phi\sin\theta)^2}$, i.e., $\cos\phi = \sqrt{3}\sin\phi$, logo, $\phi = \frac{\pi}{6}$. Assim, o sólido S ocupa a região descrita em coordenadas esféricas pelas inequações $0 \leq \theta \leq 2\pi$, $\frac{\pi}{6} \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}$, $0 \leq r \leq 2$. A massa m de S é dada por

$$m = \int\int\int_S \delta(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int_0^{2\pi}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\int_0^2 (r^2\cos\phi)(r^2\sin\phi)\,dr\,d\phi\,d\theta = \frac{48\pi}{5} \text{ unidades de massa}.$$

∎

(a) **(2 pontos)** Calcule o centro de massa de S.

Solução.

Sejam $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ as coordenadas do centro de massa de S. Por simetria do sólido S e de sua função densidade em relação aos eixos x e y, segue que $\bar{x} = \bar{y} = 0$. Calculemos $\bar{z}$:

$$\begin{aligned}
m\bar{z} &= \int\int\int_S z\delta(x,y,z)\,dx\,dy\,dz \\
&= \int_0^{2\pi}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\int_0^2 (r\cos\phi)(r^2\cos\phi)(r^2\sin\phi)\,dr\,d\phi\,d\theta \\
&= 2\pi\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\phi\sin\phi\,d\phi \cdot \int_0^2 r^5\,dr \\
&= \frac{8\pi\sqrt{3}}{3}.
\end{aligned}$$

Assim,

$$\bar{z} = \frac{\frac{8\pi\sqrt{3}}{3}}{\frac{48\pi}{5}} = \frac{5\sqrt{3}}{18}.$$

Logo, o centro de massa de S tem coordenadas $(0, 0, \frac{5\sqrt{3}}{18})$. ∎

Questão 3 **(2 pontos)** Calcule

$$\int_\gamma \left\{\ln(x+2)-y^2\right\}dx+\left\{x^2+\cos(e^{y^2})\right\}dy\,,$$

onde γ é o arco de circunferência $x^2+y^2=1,\ y\geq 0$, percorrido no sentido anti-horário.

Solução.

Sejam μ o segmento de reta unindo os pontos $(-1,0)$ e $(1,0)$ parametrizado como $\mu(t)=(t,0)$, $-1\leq t\leq 1$, e D o semi-círculo interior às curvas γ e μ. Pondo $P(x,y)=\ln(x+2)-y^2$ e $Q(x,y)=x^2+\cos(e^{y^2})$, temos, pelo Teorema de Green, que $\int_{\partial D} P\,dx+Q\,dy=\int\int_D (Q_x-P_y)\,dx\,dy$, ou seja,

$$\begin{aligned}\int_\gamma P\,dx+Q\,dy+\int_\mu P\,dx+Q\,dy &= \int\int_D (2x+2y)\,dx\,dy\\ &= 2\int_0^\pi\int_0^1 (r\sin\theta)\,r\,dr\,d\theta\\ &= \frac{4}{3}\,.\end{aligned}$$

Mas

$$\begin{aligned}\int_\mu P\,dx+Q\,dy &= \int_{-1}^1 \ln(x+2)\,dx\\ &= (x+2)\ln(x+2)-(x+2)\,\Big|_{x=-1}^{x=1}\\ &= 3\ln 3-2\,,\end{aligned}$$

Logo,

$$\int_\gamma P\,dx+Q\,dy=\frac{4}{3}-(3\ln 3-2)=\frac{10}{3}-3\ln 3\,.$$

∎