UFPR - Universidade Federal do Paraná
Departamento de Matemática
CM042 - Cálculo II - Turma B
Prof. José Carlos Eidam

GABARITO DA QUARTA PROVA - TIPO B - 21/12/2011

Questão 1 **(3 pontos)** Calcule

$$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{N}\, dS$$

onde $\vec{F}$ é o campo

$$\vec{F}(x,y,z) = (\ln(2+z^4) + xy^2)\vec{i} + (x^3e^{-z} + \cos x)\vec{j} + (x^{2011} + x^2z)\vec{j}$$

e S é a parte do parabolóide $z = x^2 + y^2$ limitada pelo plano $z = 4$, orientada de forma que o vetor normal no ponto $(0,0,0)$ seja $-\vec{k}$.

Solução.
Chamemos de S_1 a parte do plano $z = 4$ interior ao parabolóide $z = x^2 + y^2$, orientada de forma que seu normal seja o vetor $\vec{k}$ e E a região delimitada por S e S_1. Pelo teorema da divergência, temos

$$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{N}\, dS + \iint_{S_1} \vec{F} \cdot \vec{N}\, dS = \iiint_E \operatorname{div} \vec{F}\, dxdydz.$$

Chamemos de $\star$ e $\star\star$ a segunda e a terceira integrais acima, respectivamente. Chamando de D o círculo no plano xy de raio 2 e centro na origem, como $\operatorname{div} \vec{F}(x,y,z) = x^2 + y^2$, temos

$$\star\star = \iiint_E (x^2+y^2)\, dxdydz = \iint_D \left(\int_{x^2+y^2}^4 (x^2+y^2)\, dz \right) dxdy = \int_0^{2\pi} \int_0^2 r^3(4-r^2)\, dr d\theta = \frac{32\pi}{3}.$$

Além disso,

$$\star = \iint_D (x^{2011} + 4x^2)\, dxdy = \iint_D 4x^2\, dxdy = 4\int_0^{2\pi} \int_0^2 r^3 \cos^2\theta\, dr d\theta = 16\pi.$$

Logo, $\iint_S \vec{F} \cdot \vec{N}\, dS = \frac{32\pi}{3} - 16\pi = -\frac{16\pi}{3}$.

∎

Questão 2 **(3 pontos)** Considere o campo de vetores

$$\vec{F}(x,y,z) = (xy\cos z)\vec{i} + (y^3 + \arctan(x+z))\vec{j} + (-y\sin z)\vec{k}$$

em $\mathbb{R}^3$ e S a esfera de equação $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ orientada pela normal exterior. Calcule o fluxo de $\vec{F}$ através de S.

Solução. Temos que $\operatorname{div} \vec{F}(x,y,z) = 3y^2$, logo, pelo teorema da divergência,

$$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{N}\, dS = \iiint_E 3y^2\, dxdydz = 3\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^1 6r^4 \sin^2\theta \sin^3\phi\, dr d\phi d\theta = \frac{4\pi}{5}.$$

∎

Questão 3 **(2 pontos)** Calcule

$$\oint_\gamma \vec{F}\cdot d\vec{r},$$

onde $\vec{F}$ é o campo de vetores

$$\vec{F}(x,y,z) = (x^2z + y + e^{1+x^2})\vec{i} + (xy^2 + x + \cos(y^3))\vec{j} + (z^4 - 2\sin z)\vec{k}$$

e γ a curva de intersecção do plano $x+y+z=1$ com o cilindro $x^2+y^2=4$ orientada de forma que sua projeção no plano xy seja percorrida no sentido anti-horário.

Solução.
Seja S a parte do plano $x+y+z=1$ interior ao cilindro $x^2+y^2=4$ orientada de forma sua normal tenha terceira coordenada positiva. Uma possível parametrização para S é $\sigma(u,v) = (u,v,1-u-v)$, $(u,v)\in D: u^2+v^2 \le 4$ e $\vec{N} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$. Pelo teorema de Stokes, como $\text{rot}\,\vec{F}(x,y,z) = (0,x^2,y^2)$, segue que

$$\oint_\gamma \vec{F}\cdot d\vec{r} = \iint_S \text{rot}\,\vec{F}\cdot\vec{N}\,dS = \iint_D (u^2+v^2)\,du\,dv = \int_0^{2\pi}\int_0^2 r^3\,dr\,d\theta = 8\pi.$$

∎

Questão 4 Seja S a parte da esfera $x^2+y^2+z^2=16$ que fica acima do plano $z=2$.

(a) **(1 ponto)** Encontre uma parametrização para S.

Solução.

Podemos parametrizar S como o gráfico da função $z = \sqrt{16-x^2-y^2}$ pondo

$$\sigma(u,v) = (u,v,\sqrt{16-u^2-v^2}),\ (u,v)\in D: u^2+v^2 \le 8.$$

Podemos também parametrizar S usando coordenadas esféricas:

$$\sigma(\phi,\theta) = (4\sin\phi\cos\theta, 4\sin\phi\sin\theta, 4\cos\phi),\ 0\le\phi\le\pi/4,\ 0\le\theta\le 2\pi.$$

∎

(a) **(1 ponto)** Calcule a área de S.

Solução.

Usando a segunda parametrização, temos que $|\vec{n}(\sigma(\phi,\theta))| = 16\sin\phi$, logo

$$A = \iint_S dS = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2} 16\sin\phi\,d\phi\,d\theta = 16\pi(2-\sqrt{2}).$$

∎