Exercícios de Análise I - CM095

Prof. José Carlos Corrêa Eidam
DMAT/UFPR

Disponível no sítio `people.ufpr.br/ ˜eidam/index.htm`

2o. semestre de 2011

Parte 1

A letra $\mathbb{K}$ denota um corpo ordenado qualquer.

✰ Corpos ordenados

1. Verifique as seguintes propriedades para quaisquer $x, y, z \in \mathbb{K}$:

   ① (Unicidade do inverso aditivo) Se $x + y = 0 = x + z$ então $y = z$.

   ② (Unicidade do inverso multiplicativo) Se x, y, z são não-nulos e $xy = 1 = xz$ então $y = z$.

   ③ (Unicidade do zero) Existe um *único* elemento $0 \in \mathbb{K}$ tal que $x + 0 = x = 0 + x$ para todo $x \in \mathbb{K}$.

   ④ (Unicidade da unidade) Existe um *único* elemento $1 \in \mathbb{K}$ tal que $1x = x = x1$ para todo $x \in \mathbb{K}$.

   ⑤ Se $x + y = x + z$ então $y = z$.

   ⑥ Se $x \neq 0$ e $xy = xz$ então $y = z$.

   ⑦ Se $xy = 0$ então $x = 0$ ou $y = 0$.

2. Dados $x, x', y, y', z \in \mathbb{K}$ quaisquer, prove as afirmações abaixo:

   ① Se $x \in \mathbb{K}$ é não-nulo, então $x^2 > 0$. Em particular, $-1 < 0 < 1$.

   ② Dado qualquer $a \in \mathbb{K}$, $a > 0$, mostre que não existe nenhum $x \in \mathbb{K}$ tal que $x^2 + a = 0$.

   ③ $x < y$ se e só se $x + z < y + z$.

   ④ Se $z > 0$ então $x < y$ se e só se $xz < yz$.

   ⑤ $x > 0$ se e só se $\frac{1}{x} > 0$.

   ⑥ Se $x > 0$, $y < 0$ e $z < 0$ então $xy < 0$ e $xz > 0$.

   ⑦ $x < y$ se e só se $-y < -x$.

   ⑧ Se $0 < x < y$ e $0 < x' < y'$ então $0 < xx' < yy'$.[1]

   ⑨ Se $0 < x < y$ e $n \in \mathbb{N}$ então $0 < x^n < y^n$.

   ⑩ Se $x, y > 0$ e $x + y = 0$ então $x = y = 0$. Em particular, se $x^2 + y^2 = 0$ então $x = y = 0$.

3. Considere os conjuntos $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ formados pelo números naturais, inteiros e racionais, respectivamente.

   ① Seja $f : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$ definida indutivamente por $f(1) = 1$ e $f(n+1) = f(n)+1$, i.e., $f(n) = \underbrace{1 + \ldots + 1}_{n\text{vezes}}$ para $n \geq 1$. Mostre que f é *crescente*, i.e., $m < n$ implica $f(m) < f(n)$, para todos $m, n \in \mathbb{N}$. Em particular, f é injetora. Isso nos permite considerar $\mathbb{N} \subset \mathbb{K}$.

   ② Mostre, por indução, que $f(m + n) = f(m) + f(n)$ e $f(mn) = f(m)f(n)$ para quaisquer $m, n \in \mathbb{N}$.

   ③ Definimos $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{K}$ por $g(n) = f(n)$ se $n \geq 0$ e $g(n) = -f(-n)$ se $n < 0$. Mostre que g também é crescente e portanto, podemos considerar $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{K}$. Prove uma afirmação análoga à ② para g.

[1] Esta afirmação é falsa, em geral, sem a hipótese que todos os números envolvidos são positivos.

④ Considere $h:\mathbb{Q}\to\mathbb{K}$ dada por $h(p/q)=g(p)/g(q)$, para quaisquer $p,q\in\mathbb{Z}$, $q\neq 0$. Mostre que g é crescente, e, portanto, podemos considerar também $\mathbb{N}\subset\mathbb{Z}\subset\mathbb{Q}\subset\mathbb{K}$.

4. Podemos, pelo exercício anterior, considerar $\mathbb{N}\subset\mathbb{K}$.

   ① Mostre que $\mathbb{N}\subset\mathbb{K}$ é infinito. Em particular, um corpo ordenado é sempre infinito.

   ② Prove que nenhum corpo finito pode ser ordenado.

   ③ Se $\mathbb{N}\subset\mathbb{K}$ é limitado, então não existe $\sup\mathbb{N}$.

5. Considere $n>1$ um número inteiro. Dados $k,l\in\mathbb{Z}$, dizemos que $k\equiv l\,(mod\,n)$ se e só se $k-l$ é múltiplo de n.

   ① Mostre que $\equiv$ define uma relação de equivalência em $\mathbb{Z}$. A classe de equivalência de um inteiro k é denotada por $\overline{k}$ e o conjunto de todas as classes de equivalência é denotado por $\mathbb{Z}_n$. Tal conjunto é chamado, às vezes, de *conjunto dos inteiros módulo n*. Evidentemente, $\mathbb{Z}_n=\{\overline{0},\overline{1},\ldots,\overline{n-1}\}$.

   ② Mostre que $\overline{k}+\overline{l}=\overline{k+l}$ e $\overline{k}\,\overline{l}=\overline{kl}$, para $k,l\in\mathbb{Z}$, definem[2] operações de soma e multiplicação em $\mathbb{Z}_n$. Estas operações são associativas, comutativas, admitem elementos neutros e verificam distributividade.

   ③ Mostre que $\mathbb{Z}_n$ é um corpo se e só se n é primo.

   ④ Mostre que se n é primo então $\mathbb{Z}_n$ *não* admite estrutura de corpo ordenado.

6. Dados $a\in\mathbb{K}$ e n um inteiro positivo, definimos indutivamente $a^1=a$ e $a^n\doteq a^{n-1}\cdot a$. Convencionamos que $a^0=1$ se $a\neq 0$. Se $n<0$ é inteiro e $a\neq 0$, definimos $a^n=(a^{-1})^{-n}$. Verifique as seguintes afirmações para quaisquer inteiros m,n e $a,b\in\mathbb{K}$ não-nulos:

   ① $a^{m+n}=a^m\cdot a^n$;

   ② $a^{mn}=(a^m)^n$;

   ③ $(ab)^n=a^nb^n$;

   ④ Se $0<a<b$ então $0<a^n<b^n$;

   ⑤ $(a+b)^n=\sum_{j=0}^n\binom{n}{j}a^jb^{n-j}$ (*Fórmula do binômio de Newton*).

7. Sejam $a_1,\ldots,a_n,b_1,\ldots,b_n\in\mathbb{R}$.

   ① Prove a *identidade de Lagrange*:

$$\left(\sum_{j=1}^n a_jb_j\right)^2=\left(\sum_{j=1}^n a_j^2\right)\left(\sum_{j=1}^n b_j^2\right)-\sum_{1\leq k<l\leq n}(a_kb_l-a_lb_k)^2.$$

   ② Prove a *desigualdade de Cauchy-Schwarz*:

$$\sum_{j=1}^n|a_jb_j|\leq\left(\sum_{j=1}^n a_j^2\right)^{1/2}\cdot\left(\sum_{j=1}^n b_j^2\right)^{1/2}.$$

   Mostre que ocorre a igualdade na desigualdade de Cauchy-Schwarz se e somente se existe $\alpha\in\mathbb{R}$ tal que $b_j=\alpha a_j$ ou $a_j=\alpha b_j$ para cada $j=1,\ldots,n$.

[2]Mostre, inclusive, que estas operações são bem-definidas.

③ Prove a *desigualdade de Minkowski*:

$$\left(\sum_{j=1}^{n}(a_j+b_j)^2\right)^{1/2} \leq \left(\sum_{j=1}^{n}a_j^2\right)^{1/2} + \left(\sum_{j=1}^{n}b_j^2\right)^{1/2}.$$

8. (Desigualdades de Bernoulli) Dado um inteiro positivo n, mostre, por indução, as seguintes desigualdades em $\mathbb{K}$:

   ① Se $x > -1$ então $(1+x)^n \geq 1 + nx$.

   ② Se $x \neq 0$ então $(1+x)^{2n} > 1 + 2nx$.

   ③ Se $a > 0$ e $a + x > 0$ então $(a+x)^n \geq a^n + na^{n-1}x$.

9. Mostre que as seguintes afirmações são equivalentes:

   ① $\mathbb{N} \subset \mathbb{K}$ é ilimitado.

   ② Dado qualquer $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{N} < \varepsilon$.

   ③ Dados $\varepsilon > 0$ e $A > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $N\varepsilon > A$. (Princípio de Arquimedes)

   ④ Dados $a > 1$ e $A > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $a^N > A$.

   ⑤ Dados $0 < a < 1$ e $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $a^N < \varepsilon$.

   Um corpo ordenado satisfazendo qualquer uma das afirmações acima é dito *arquimediano*.

10. Seja $\mathbb{K}$ um corpo ordenado arquimediano. Prove as seguintes afirmações:

    ① Dados $x < y$ em $\mathbb{K}$ existe $r \in \mathbb{Q}$ tal que $x < r < y$.

    ② Se existe $\xi \in \mathbb{K} \setminus \mathbb{Q}$, então existe $r \in \mathbb{Q}$ tal que $x < r\xi < y$. Em particular, existe $\eta \in \mathbb{K} \setminus \mathbb{Q}$ tal que $x < \eta < y$.

    ③ Existem infinitos r's satisfazendo ① e ②.

11. Considere o conjunto $\mathbb{Q}(x)$ dos quocientes da forma $\frac{p(x)}{q(x)}$, onde p e $q \neq 0$ são polinômios com coeficientes racionais. Nestas circunstâncias, dizemos que $\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{p'(x)}{q'(x)}$ se e só se $p(x)q'(x) = p'(x)q(x)$. Podemos definir operações de soma e produto pelas fórmulas

    $$\frac{p(x)}{q(x)} + \frac{p'(x)}{q'(x)} = \frac{p(x)q'(x) + p'(x)q(x)}{q(x)q'(x)}$$

    e $\frac{p(x)}{q(x)}\frac{p'(x)}{q'(x)} = \frac{p(x)p'(x)}{q(x)q'(x)}$.

    ① Mostre que as operações definidas acima são bem-definidas e tornam $\mathbb{Q}(x)$ um corpo.

    ② Dizemos que $\frac{p(x)}{q(x)} > 0$ se os coeficientes dos termos de maior grau de p e q tiverem o mesmo sinal. Mostre que esta definição torna $\mathbb{Q}(t)$ um corpo ordenado.

    ③ Mostre que para qualquer inteiro positivo n tem-se $n < x$ (Aqui x denota o polinômio $p(x) = x$). Em particular, $\mathbb{Q}(x)$ *não* é arquimediano.

12. Mostre que qualquer intervalo em um corpo ordenado é infinito.

13. Dados $a, b \in \mathbb{K}$ tais que $|a - b| < \varepsilon$, mostre que $|b| - \varepsilon < |a| < |b| + \varepsilon$ e $a < |b| + \varepsilon$.

14. Mostre que $xy \leq \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$, para todos $x, y \in \mathbb{K}$.

☆ Supremo e ínfimo

15. Seja $X \subset \mathbb{K}$ não-vazio.

    ① Mostre que, caso existam, $\sup X$ e $\inf X$ são únicos e $\inf X \leq \sup X$.

    ② Admitindo que exista $\max X$, mostre que existe $\sup X$ e $\max X = \sup X$. Prove um resultado análogo para min e inf em lugar de max e sup.

    ③ Encontre uma situação em que existe $\sup X \in \mathbb{K}$ mas não existe $\max X$.

    ④ Encontre uma situação na qual não exista nem $\max X$ nem $\sup X$.

    ⑤ Mostre que se $a \in X$ é uma cota superior (inferior) de X então $a = \sup X$ ($a = \inf X$).

    ⑥ Se X é limitado superiormente então $\sup X = \inf\{c \in \mathbb{K} : \ c \text{ é cota superior de } X\}$. Caso X seja limitado inferiormente, tem-se $\inf X = \sup\{c \in \mathbb{K} : \ c \text{ é cota inferior de } X\}$.

16. Seja $X \subset \mathbb{K}$ não-vazio e $a \in \mathbb{K}$. Prove que as seguintes afirmações são equivalentes:

    ① $\inf X = a$

    ② $a \leq x$ para todo $x \in X$ e dado qualquer $\varepsilon > 0$ existe $x \in X$ tal que $x < a + \varepsilon$.

    Prove uma equivalência análoga para sup em lugar de inf.

17. Se $X \subset \mathbb{K}$ é um não-vazio ilimitado superiormente (inferiormente), dizemos que $\sup X = \infty$ ($\inf X = -\infty$).

    ① Mostre que $\sup X = \infty$ se e só para qualquer $A \in \mathbb{K}$ existe $x \in X$ tal que $x > A$.

    ② Mostre que $\inf X = -\infty$ se e só para qualquer $A \in \mathbb{K}$ existe $x \in X$ tal que $x < A$.

    Convenciona-se que $\pm\infty \pm \infty = \pm\infty$, $\pm\infty + a = \pm\infty$, $a \cdot (\pm\infty) = \pm\infty$ se $a > 0$, $a \cdot (\pm\infty) = \mp\infty$ se $a < 0$ e $-\infty < a < \infty$ para qualquer $a \in \mathbb{K}$.

18. Sejam $X, Y \subset \mathbb{K}$ não-vazios que admitem supremo e ínfimo e $c \in \mathbb{K}$. Considere os conjuntos $X + Y \doteq \{x + y : x \in X, \ y \in Y\}$, $cX \doteq \{cx : x \in X\}$ e $X \cdot Y \doteq \{xy : x \in X, \ y \in Y\}$.

    ① Mostre que $\sup(X + Y) = \sup X + \sup Y$ e $\inf(X + Y) = \inf X + \inf Y$.

    ② Mostre que $\sup(cX) = c \sup X$ e $\inf(cX) = c \inf X$ se $c > 0$. O que ocorre se $c < 0$?

    ③ Mostre que $\sup(X \cup Y) = \max\{\sup X, \sup Y\}$ e $\inf(X \cup Y) = \min\{\sup X, \sup Y\}$.

    ④ Mostre que se X, Y contém somente elementos positivos, então $\sup(X \cdot Y) = (\sup X)(\sup Y)$ e $\inf(X \cdot Y) = (\inf X)(\inf Y)$.

    ⑤ Pondo $-X = (-1)X$, mostre que $\sup(-X) = -\inf X$ e $\inf(-X) = -\sup X$.

19. Sejam $X \subset Y \subset \mathbb{K}$ conjuntos limitados não-vazios que admitem sup e inf.

    ① Prove que $\inf Y \leq \inf X$ e $\sup X \leq \sup Y$.

    ② Suponha que dado qualquer $y \in Y$ existe $x \in X$ tal que $y \leq x$. Mostre que $\sup X = \sup Y$.

③ Suponha que dado qualquer $y \in Y$ existe $x \in X$ tal que $x \leq y$. Mostre que $\inf X = \inf Y$.

20. Sejam $X \subset Y \subset \mathbb{K}$ conjuntos não-vazios que admitem sup e inf. Assuma que para quaisquer $x \in X$ e $y \in Y$, tem-se $x \leq y$.

    ① Prove que $\sup X \leq \inf Y$.

    ② Prove que $\sup X = \inf Y$ se e só se dado $\varepsilon > 0$ existem $x \in X$ e $y \in Y$ tais que $y - x < \varepsilon$.

21. Determine, caso existam, o supremo e o ínfimo (em $\mathbb{Q}$) dos seguintes conjuntos:

    ① $\{\frac{n-1}{n+1} : n \in \mathbb{N}\}$
    ② $\{\frac{n}{1+n^2} : n \in \mathbb{N}\}$
    ③ $\{x \in \mathbb{Q} : x^2 - 2x + 2 < 0\}$
    ④ $\{\frac{2n-1}{3n+1} : n \in \mathbb{N}\}$
    ⑤ $\{x \in \mathbb{Q} : x^3 < 7\}$

22. Mostre, por indução, que qualquer conjunto finito X possui supremo e ínfimo, os quais coincidem com os elementos máximo e mínimo de X, respectivamente.

✰ O corpo dos números reais

23. Mostre que as seguintes afirmações a respeito de um corpo ordenado $\mathbb{K}$ são equivalentes:

    ① Todo subconjunto não-vazio limitado superiormente (inferiormente) de $\mathbb{K}$ tem supremo (ínfimo).

    ② Se $I_1 \supset I_2 \supset \ldots$ é uma sequência de intervalos fechados então $\bigcap_{j=1}^{\infty} I_j \neq \emptyset$.

    Um corpo ordenado é dito *completo* se qualquer uma das afirmações acima é verificada em $\mathbb{K}$.

24. Mostre que o conjunto $X = \{r \in \mathbb{Q} : r^2 < 2\}$ não tem supremo em $\mathbb{Q}$. Conclua que $\mathbb{Q}$ *não* é completo. Encontre outros conjuntos que não possuem supremo ou ínfimo em $\mathbb{Q}$.

25. Mostre que um corpo ordenado completo deve ser arquimediano e não-enumerável.

26. Um subconjunto X de um corpo ordenado $\mathbb{K}$ é chamado de *intervalo* se dados $x, y \in X$ com $x < y$ e $z \in \mathbb{K}$ tal que $x < z < y$ tem-se que $z \in X$. Mostre que se $X, Y \subset \mathbb{K}$ são intervalos então $X + Y$ e cX são intervalos, para qualquer $c \in \mathbb{R}$.

27. Um *corte de Dedekind*, ou simplesmente, um *corte* é um subconjunto não-vazio $A \subset \mathbb{Q}$ tal que:

    ⚹ $A \neq \mathbb{Q}$;
    ⚹ Se $x \in A$ e $y < x$ então $y \in A$.
    ⚹ A não tem elemento máximo.

    Prove as seguintes afirmações:

    ① Mostre que se A é um corte, então A é um intervalo.

② Mostre que se A, B são cortes então $A+B$ é um corte (conforme a definição dada no exercício (19)). Denotando por 0 o corte $(-\infty, 0)$, mostre que $A+0=0+A=A$ para qualquer corte A. Mostre que o conjunto dos cortes é um grupo abeliano munido da operação de soma e que o inverso aditivo de A é o corte

$$A' = \{x \in \mathbb{Q} : -x \in \mathbb{Q} \setminus A \text{ e } -x \text{ não é menor elemento de } \mathbb{Q} \setminus A\}.$$

③ Dizemos que A é *positivo*, fato este denotado por $A > 0$, se $A \not\subset (-\infty, 0)$. Caso $A \neq 0$ não seja positivo, dizemos que A é *negativo* e escrevemos $A < 0$. Se A, B são cortes positivos, mostre que

$$A \cdot B = \{x \in \mathbb{Q} : x < 0 \text{ ou } x = a \cdot b, \text{ com } a \in A,\ b \in B \text{ e } a, b \geq 0\}$$

é um corte positivo.

④ Estenda a definição de produto dada no ítem anterior para cortes arbitrários e mostre que o conjunto dos cortes munido desta operação de produto e da soma definida anteriormente é um corpo. Identifique os inversos multiplicativos e a unidade da multiplicação. Este corpo é chamado de corpo dos números reais e denotado pela letra $\mathbb{R}$.

⑤ Mostre que o conjunto dos cortes positivos é fechado por soma e multiplicação e satisfaz a condição de tricotomia[3]. Em particular, podemos introduzir em $\mathbb{R}$ uma ordem que o torna um corpo ordenado.

⑥ Mostre que qualquer subconjunto não-vazio limitado superiormente de $\mathbb{R}$ tem supremo. (Dica: Se X é um conjunto limitado superiormente de cortes, então $\sup X = \bigcup_{A \in X} A$.) Conclua que $\mathbb{R}$ é completo.

⑦ Dado $r \in \mathbb{Q}$, podemos considerar o corte $C_r = (-\infty, r)$. Mostre que a aplicação $\mathbb{Q} \ni r \mapsto C_r \in \mathbb{R}$ é um homomorfismo crescente de corpos ordenados. Isso nos permite considerar $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

⑧ Seguindo o roteiro abaixo, mostre que dado qualquer corpo ordenado completo $\mathbb{K}$ existe um *isomorfismo* $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{K}$, i.e., um homomorfismo crescente bijetor. Assim, podemos dizer, num sentido bastante estrito, que $\mathbb{R}$ é o *único* corpo ordenado completo.

- Construa um homomorfismo crescente $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$.
- Estenda f a $\tilde{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{K}$ pondo $\tilde{f}(a) = \sup_{x<a,\, x\in\mathbb{Q}} f(x) = \inf_{y>a,\, x\in\mathbb{Q}} f(y)$. Mostre que $\tilde{f}$ é bem-definida.
- Mostre que $\tilde{f}$ é um homomorfismo crescente de grupos.
- Conclua que $\tilde{f}$ é sobrejetora. (A imagem de $\tilde{f}$ é um intervalo contendo o conjunto ilimitado $\tilde{f}(\mathbb{Z})$.)

28. Sejam $X \subset \mathbb{R}$ não-vazio e $f : X \to \mathbb{R}$ uma função. Definimos $\sup f \doteq \sup f(X)$ e $\inf f \doteq \inf f(X)$; f é dita *limitada* se $-\infty < \inf f \leq \sup f < \infty$.

    (a) Mostre que $\inf f + \inf g \leq \inf(f+g) \leq \sup(f+g) \leq \sup f + \sup g$.

    (b) Mostre que $(\inf f)(\inf g) \leq \inf(f \cdot g) \leq \sup(f \cdot g) \leq (\sup f)(\sup g)$.

    (c) Encontre situações em que as desigualdades acima são estritas.

29. Neste exercício, mostraremos a existência de raízes n-ésimas em $\mathbb{R}$. Para tanto, fixemos $a > 0$ e n um inteiro positivo.

[3]Isso significa que, para qualquer corte A, ou $A > 0$, ou $A = 0$ ou $A < 0$.

① Mostre que o conjunto $X = \{x \in \mathbb{R} : x > 0 \text{ e } x^n < a\}$ é limitado.

② Dado $x \in X$, encontre $C > 0$ dependendo de n e x tal que $(x+\varepsilon)^n < x^n + C\varepsilon$ para todo $\varepsilon \in (0,1)$.

③ Mostre que X não tem elemento máximo.

④ Use o exercício (8) para mostrar que se $y^n > a$ e $0 < \varepsilon < y$, então $(y-\varepsilon)^n > y^n - ny^{n-1}\varepsilon$. Conclua que o conjunto $Y = \{y \in \mathbb{R} : y > 0 \text{ e } y^n > a\}$ não tem elemento mínimo.

⑤ Seja $b = \sup X$. Mostre que b é o único número real positivo tal que $b^n = a$. b é chamado de *raiz n-ésima* de a e denotado por $\sqrt[n]{a}$.

⑥ Mostre que se n é *ímpar* e $a \in \mathbb{R}$ é qualquer, então existe $b \in \mathbb{R}$ tal que $b^n = a$. b é único em $\mathbb{R}$ se $a < 0$.

⑦ Mostre que a função $f : [0,\infty) \to [0,\infty)$ dada por $f(x) = \sqrt[n]{x}$ é uma bijeção crescente. Mostre que $\sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m$.

30. Mostre que $\sqrt{xy} \le \frac{x+y}{2}$ para quaisquer $x, y > 0$.

31. Mostre que se $m, n > 1$ são inteiros tais que $m \neq k^n$ para todo $k \in \mathbb{N}$ então $\sqrt[n]{m}$ é irracional.

32. Sejam m, n inteiros positivos tais que $\sqrt{m}, \sqrt{n} \notin \mathbb{Q}$. Mostre que $\sqrt{m} \pm \sqrt{n} \notin \mathbb{Q}$.

33. Mostre que $\sqrt{2}\sqrt[3]{17}\sqrt[5]{8}$ é irracional.

34. Assinale V ou F:

① O produto de dois números irracionais é sempre irracional.

② A soma de dois números irracionais é sempre irracional.

③ A soma de dois números irracionais positivos é sempre irracional.

35. Dados $k > 1$ inteiro e $x > 0$, seja a_1 o maior inteiro menor ou igual a x. Supondo definidos $a_1, \ldots, a_n$, definimos a_{n+1} como o maior inteiro com a propriedade que

$$a_1 + \frac{a_2}{k^2} + \ldots + \frac{a_n}{k^n} + \frac{a_{n+1}}{k^{n+1}} \le x.$$

① Mostre que $0 \le a_n < k$, para todo $n > 0$.

② Explique geometricamente como obter os números $a_0, a_1, a_2, \ldots$.

③ Mostre que

$$0 \le x - \left(a_1 + \frac{a_2}{k^2} + \ldots + \frac{a_n}{k^n}\right) < \frac{1}{k^n},$$

para todo $n > 0$. Conclua que $x = \sup\{a_1 + \frac{a_2}{k^2} + \ldots + \frac{a_n}{k^n} : n \in \mathbb{N}\}$. A sequência de inteiros $(a_0 a_1 a_2 \ldots)$ é chamada de *expansão de x na base k*.

36. Neste exercício, descreveremos a potenciação com expoentes fracionários e reais. Dados $a > 0$ e m, n inteiros positivos, definimos $a^{1/n} \doteq \sqrt[n]{a}$ e $a^{m/n} \doteq \sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m$.

(a) Se $r = m/n \in \mathbb{Q}$ com $m, n > 0$ inteiros, podemos definir $a^r \doteq a^{m/n}$. Mostre que esta é uma boa definição, i.e., independe da representação de r. Estenda esta definição para $r < 0$.

(b) Mostre que $a^{r+s} = a^r a^s$ e $a^{r+s} = a^r a^s$, para quaisquer $r, s \in \mathbb{Q}$.

(c) Mostre que $(ab)^r = a^r b^r$ para quaisquer $b > 0$ e $r \in \mathbb{Q}$.

(d) Prove que $1 < a < b$ se e só se $a^r < b^r$ para qualquer $r \in \mathbb{Q}$, $r > 0$.

(e) Admitindo que $a > 1$, prove que $r < s$ se e só se $a^r < a^s$.

(f) Dado $x \in \mathbb{R}$ qualquer, definimos

$$a^x \doteq \sup\{a^r : r \in \mathbb{Q},\, r < x\}.$$

A função $\mathbb{R} \ni x \mapsto a^x \in \mathbb{R}$ é chamada de *exponencial de base a*. Mostre que a função exponencial de base a estende a função $\mathbb{Q} \ni r \mapsto a^r \in \mathbb{R}$ definida anteriormente e tem as mesmas propriedades que esta.

(g) Mostre que a exponencial de base a é uma função $\mathbb{R} \to (0,\infty)$ crescente positiva e sobrejetora. Sendo assim, admite uma inversa, chamada de *logaritmo na base a* e denotada por $(0,\infty) \ni x \mapsto \log_a x \in \mathbb{R}$. Estude as propriedades do logaritmo na base a análogas àquelas da função exponencial. Mostre que $\log_a : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ é uma bijeção crescente.

37. Um subconjunto $G \subset \mathbb{R}$ chama-se *subgrupo aditivo* se for fechado em relação à operação de soma. Seja $G_+ = G \cap (0,\infty)$, e assumamos que $G \neq \emptyset$.

① Se $\inf G_+ = 0$, mostre que G é denso em $\mathbb{R}$.

② Se $\inf G_+ = a > 0$, mostre que $G = \{na : n \in \mathbb{Z}\}$.

③ Mostre que para qualquer $\alpha \notin \mathbb{Q}$, o conjunto formado pelos números da forma $m + n\alpha$ com $m, n \in \mathbb{Z}$ é denso em $\mathbb{R}$.

38. Prove as afirmações a seguir:

① O intervalo $[0,1]$ é não-enumerável.

② O intervalo $(0,1)$ é não-enumerável.

③ $\mathbb{R}$ é não-enumerável.

④ Qualquer um dos intervalos $(a,b]$, $[a,b)$, (a,b) e $[a,b]$, com $a < b$, é não-enumerável.

⑤ O complemento de qualquer conjunto enumerável é denso.

⑥ O conjunto $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ formado pelos números irracionais é não-enumerável.

39. Mostre que $f : \mathbb{R} \to (-1,1)$ dada por $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ é uma bijeção e calcule sua inversa. Use f para construir uma bijeção entre $\mathbb{R}$ e um intervalo (a,b) qualquer, com $a < b$.

Parte 2

✰ Sequências de números reais

1. Calcule $\lim_{n\to\infty} x_n$ para cada sequência $\{x_n\}$ a seguir, justificando suas respostas:

(1) $x_n = \frac{n^2-1}{n^5+(-1)^n n^2}$ (2) $x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{1/n}$ (3) $x_n = \sqrt[n]{n^4+2011n^3-5}$

(4) $x_n = \frac{n!}{n^n}$ (5) $x_n = \frac{5^n}{3^n+5^n+7^n}$ (6) $x_n = \sqrt[n]{a^n+b^n}$

(7) $x_n = \sqrt[n]{n!}$ (8) $x_n = \frac{n+\sqrt{2n+3}}{\sqrt[4]{n}+\sqrt[7]{17n-8}}$ (9) $x_n = \frac{3n^3-n^2+11n}{n^4-2n^3}$

(10) $x_n = \left(\frac{5n+7}{3n+8}\right)^{2n-4}$ (11) $x_n = \left(\frac{3n+5}{5n+1}\right)^n \left(\frac{5}{3}\right)^n$ (12) $x_n = \frac{n!}{n^n}$

(13) $x_n = na^n$, $a \in \mathbb{R}$ (14) $x_n = n(\sqrt{n^2+1}-n)$ (15) $x_n = \frac{(n+1)^n}{n^{n+1}}$

2. Prove as afirmações abaixo a respeito de um par de sequências $\{x_n\}, \{y_n\}$ de números reais:

① $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ se e só se $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = a$ para qualquer subsequência $\{x_{n_k}\}_k$.

② Se $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ e $\lim_{n\to\infty}(x_n + y_n) = c$ então $\lim_{n\to\infty} y_n = c - a$.

③ Se $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ e $\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = c \neq 0$ então $\lim_{n\to\infty} y_n = \frac{a}{c}$.

④ Se $\lim_{n\to\infty} x_n = a \neq 0$ e $\lim_{n\to\infty} x_n y_n = c$ então $\lim_{n\to\infty} y_n = \frac{c}{a}$.

⑤ Se $\lim_{n\to\infty} x_n = a > 0$ e $k \in \mathbb{N}$ é fixado, então $\lim_{n\to\infty} \sqrt[k]{x_n} = \sqrt[k]{a}$. Se k é ímpar, mostre que o resultado vale também para $a > 0$.

⑥ Se $\lim_{n\to\infty} x_n = a > 0$ e $r \in \mathbb{Q}$ é fixado, então $\lim_{n\to\infty} {x_n}^r = a^r$.

⑦ $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ se e só se $\lim_{n\to\infty} |x_n| = 0$.

⑧ Se $\lim_{n\to\infty} x_n > a$ então existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $x_n > a$ para todo $n \geq N$.

⑨ Se existem $\lim_{n\to\infty} x_n$ e $\lim_{n\to\infty} y_n$ e $x_n \leq y_n$ para todo $n \geq N$ então $\lim_{n\to\infty} x_n \leq \lim_{n\to\infty} y_n$.

⑩ Se $\{x_n\}$ é limitada e $\lim_{n\to\infty} y_n = 0$ então $\lim_{n\to\infty} x_n y_n = 0$.

3. (Exercício (9) da lista (1) revisitado) Mostre que as seguintes afirmações são equivalentes em um corpo ordenado $\mathbb{K}$:

① $\mathbb{N} \subset \mathbb{K}$ é ilimitado;

② $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$;

③ Se $0 < a < 1$ então $\lim_{n\to\infty} a^n = 0$;

④ Se $a > 1$ então $\lim_{n\to\infty} a^n = +\infty$;

4. Mostre que se uma sequência de Cauchy tem uma subsequência que converge para a então a sequência converge para a.

5. Mostre que se uma sequência monótona tem uma subsequência que converge para a então a sequência converge para a.

6. Sejam $x_1 = 1$ e $x_{n+1} = \sqrt{2x_n}$, $n \geq 1$.

① Mostre que $x_n \leq 2$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

② Mostre que $\{x_n\}$ é crescente.

③ Conclua que existe $a = \lim_{n\to\infty} x_n$ e calcule a.

7. Sejam $x_1 = 1$ e $x_{n+1} = 1 + \sqrt{x_n}$, $n \geq 1$.

   ① Mostre que $\{x_n\}$ é limitada .

   ② Mostre que $\{x_n\}$ é crescente.

   ③ Conclua que existe $a = \lim_{n\to\infty} x_n$ e calcule a.

8. Sejam $x_1 = 1$ e $x_{n+1} = 1 + \frac{1}{x_n}$, $n \geq 1$. Mostre que $|x_{n+2} - x_{n+1}| \leq \frac{1}{2}|x_{n+1} - x_n|$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Conclua que existe $a = \lim_{n\to\infty} x_n$ e calcule a.

9. Seja $\{x_n\}$ uma sequência limitada e considere os números

$$a \doteq \sup\left\{x \in \mathbb{R} : x \text{ é ponto de aderência de } \{x_n\}\right\},$$

   $b \doteq \lim_{n\to\infty} b_n$, onde $b_n \doteq \sup\{x_j : j \geq n\}$ e $c \doteq \inf\{x \in \mathbb{R} : \{n \in \mathbb{N} : x_n > x\} \text{ é finito}\}$.

   Mostre que os números a, b, c são bem definidos e $a = b = c$. Este valor comum é chamado de $\limsup_{n\to\infty} x_n$. Prove uma afirmação análoga para $\liminf_{n\to\infty} x_n$.

10. Seja $\{x_n\}$ uma sequência de números reais.

    ① Se $\limsup_{n\to\infty} \frac{|x_{n+1}|}{|x_n|} < 1$ então $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$.

    ② Se $\limsup_{n\to\infty} \frac{|x_{n+1}|}{|x_n|} > 1$ então $\lim_{n\to\infty} |x_n| = +\infty$.

    ③ Se $\limsup_{n\to\infty} \frac{|x_{n+1}|}{|x_n|} = 1$ então nada se pode afirmar, em geral.

11. Sejam $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ sequências limitadas. Verifique as seguintes afirmações:

    ① $\limsup_{n\to\infty}(x_n + y_n) \leq \limsup_{n\to\infty} x_n + \limsup_{n\to\infty} y_n$;

    ② $\liminf_{n\to\infty}(x_n + y_n) \leq \liminf_{n\to\infty} x_n + \liminf_{n\to\infty} y_n$;

    ③ $\limsup_{n\to\infty}(-x_n) = -\liminf_{n\to\infty} x_n$;

    ④ $\limsup_{n\to\infty}(x_n y_n) \leq (\limsup_{n\to\infty} x_n)(\limsup_{n\to\infty} y_n)$, se $x_n \geq 0$ e $y_n \geq 0$ para todo n suficientemente grande;

    ⑤ $\liminf_{n\to\infty}(x_n y_n) \geq (\limsup_{n\to\infty} x_n)(\limsup_{n\to\infty} y_n)$, se $x_n \geq 0$ e $y_n \geq 0$ para todo n suficientemente grande.

    ⑥ Encontre situações nas quais as desigualdades acima são estritas.

    ⑦ Se existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \leq y_n$ para todo $n \geq N$, então $\limsup_{n\to\infty} x_n \leq \limsup_{n\to\infty} y_n$ e $\liminf_{n\to\infty} x_n \leq \liminf_{n\to\infty} y_n$.

12. Dada uma sequência $\{x_n\}$, um termo x_k chama-se *termo destacado de* $\{x_n\}$ se $x_k \geq x_n$ para todo $n \geq k$ e consideremos o conjunto $K = \{k \in \mathbb{N} : x_k \text{ é um termo destacado}\} = \{k_1 < k_2 < \ldots\}$.

    ① Se K é infinito, mostre que a subequência $\{x_{k_j}\}_{j\in\mathbb{N}}$ é não-crescente.

② Se K é finito, mostre que $\{x_n\}$ possui uma subsequência crescente.

③ Conclua que qualquer sequência limitada possui uma subsequência monótona.

④ Prove, a partir das afirmações acima, que toda sequência limitada de números reais possui uma subsequência convergente.

13. Neste problema vamos dar outra prova do fato que toda sequência limitada de números reais tem subsequência convergente. Para isso, seja $\{x_n\}$ uma sequência limitada de números reais.

 ① Seja $M > 0$ tal que $-M \leq x_n \leq M$, para todo $n \in \mathbb{N}$ e considere o conjunto $X = \{x \in \mathbb{R} : x \leq x_n$ para uma infinidade de $n \in \mathbb{N}\}$. Mostre que $\alpha = \sup X$ existe e $\alpha \leq M$.

 ② Mostre que para qualquer $\varepsilon > 0$ existe uma infinidade de $n \in \mathbb{N}$ tais que $\alpha - \varepsilon < x_n < \alpha + \varepsilon$.

 ③ Conclua que α é valor de aderência de $\{x_n\}$; em particular, existe uma subsequência $\{x_{n_j}\}_{j\in\mathbb{N}}$ tal que $\lim_{j\to\infty} x_{n_j} = a$.

14. Neste problema, vamos usar o método da *caça ao leão* para provar o resultado já provado no exercício anterior. Seja $\{x_n\}$ uma sequência limitada.

 ① Não há perda de generalidade em supor que $0 \leq x_n \leq 1$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

 ② Escreva $J_0 = [0,1]$ como reunião $I_1 \cup I_2$ de dois intervalos fechados de comprimento $\frac{1}{2}$. Mostre que para algum destes dois intervalos I é verdade que $\{j \in \mathbb{N} : x_j \in I\}$ é infinito. Chame tal intervalo de J_1.

 ③ Prosseguindo indutivamente, obtemos intervalos fechados $[0,1] \supset J_1 \supset J_2 \supset \ldots J_k \supset \ldots$ de comprimento $\frac{1}{2^k}$, tais que $\{j \in \mathbb{N} : x_j \in J_k\}$ é infinito, para todo $k \in \mathbb{N}$.

 ④ Mostre que existe um único ponto $a \in \bigcap_{n=0}^{\infty} J_n$, o qual é limite de uma subsequência de $\{x_n\}$.

15. Mostre que as seguintes afirmações são equivalentes a respeito de uma sequência $\{x_n\}$ de números reais:

 (a) Existe $\lim_{n\to\infty} x_n = a$;

 (b) $\limsup_{n\to\infty} x_n = \liminf_{n\to\infty} x_n = a$.

16. Neste exercício, vamos estudar as sequências $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ e $y_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!}$, $n \in \mathbb{N}$.

 ① Mostre por indução que $n! \geq 2^{n-1}$ para todo $n \geq 1$ e conclua que existe $b = \lim_{n\to\infty} y_n$ e $2 \leq b \leq 3$.

 ② Use o binômio de Newton para provar que

$$\begin{aligned} x_n &= 1 + n\frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!}\frac{1}{n^2} + \ldots + \frac{n(n-1)\ldots 2\cdot 1}{n!}\frac{1}{n^n} \\ &= 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right) + \ldots + \frac{1}{n!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\ldots\left(1 - \frac{n-1}{n}\right). \end{aligned}$$

 Conclua que $\{x_n\}$ é uma sequência crescente e $x_n < y_n$ para cada $n \geq 1$. Em particular, existe $\lim_{n\to\infty} x_n = a$. Observe que $a \leq b$.

③ Dado $\varepsilon > 0$, seja $N \in \mathbb{N}$ tal que $b - \varepsilon < y_N = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{N!}$. Logo, para qualquer $n \geq N$,

$$x_n \quad > \quad 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1 - \frac{1}{N}\right) + \frac{1}{3!}\left(1 - \frac{1}{N}\right)\left(1 - \frac{2}{N}\right) + \ldots + \frac{1}{N!}\left(1 - \frac{1}{N}\right)\left(1 - \frac{2}{N}\right)\ldots\left(1 - \frac{p-1}{N}\right).$$

Fazendo $n \to \infty$ na desigualdade acima, mostre que $a \geq b$, portanto, $a = b$. Este número é denotado por e.

17. Uma argumentação semelhante àquela feita no exercício anterior pode ser feita com as sequências $x_n = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$ e $y_n = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}$, $n \in \mathbb{N}$, onde $x > 0$ é um número real fixado. Mostre que $\lim_{n\to\infty} x_n$ e $\lim_{n\to\infty} y_n$ existem e são iguais.

18. Sejam $x_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$ e $y_n = \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$. Mostre que $x_n y_n \to 1$ e conclua que $x_n \to \frac{1}{e}$.

19. Mostre que $\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{r}{n}\right)^n = e^r$ para todo $r \in \mathbb{Q}$.

20. Dado $a > 0$, considere a sequência $x_n = \sqrt[n]{a}$, $n \in \mathbb{N}$.

    ① Se $a > 1$, mostre que $\{x_n\}$ é decrescente; caso $0 < a < 1$, mostre que $\{x_n\}$ é crescente.

    ② Mostre que $\{x_n\}$ é limitada.

    ③ Usando o fato que $x_{2n}^2 = x_n$, calcule o valor de $\lim_{n\to\infty} x_n$.

21. Considere a sequência $y_n = \sqrt[n]{n}$, $n \in \mathbb{N}$.

    ① Mostre que $\{y_n\}$ é limitada e decrescente.

    ② Considerando a sequência $x_n = \sqrt[n]{2}$, $n \in \mathbb{N}$, analisada no exercício anterior, mostre que $y_{2n}^2 = x_{2n}^2 y_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Calcule o valor de $\lim_{n\to\infty} x_n$.

22. Seja $\{x_n\}$ uma sequência para a qual existe um número $\lambda \in (0,1)$ tal que

$$|x_{n+2} - x_{n+1}| \leq \lambda |x_{n+1} - x_n|,$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Mostre que $\{x_n\}$ é uma sequência de Cauchy.

23. Seja $a > 0$ e considere a sequência $\{x_n\}$ definida por $x_1 = c > 0$, $x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right)$, $n \in \mathbb{N}$. A constante c é escolhida arbitrariamente.

    ① Mostre que para todo $x > 0$, $\frac{1}{2}\left(x + \frac{a}{x}\right) > \sqrt{\frac{a}{2}}$.

    ② Pelo ítem anterior, $x_n > \sqrt{\frac{a}{2}}$, portanto, $\frac{a}{2x_n x_{n+1}} < 1$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

    ③ Mostre que $|x_{n+2} - x_{n+1}| < \frac{1}{2}|x_{n+1} - x_n|$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

    ④ Use o exercício anterior para mostrar que existe $\lim_{n\to\infty} x_n$. Calcule este valor.

24. Neste exercício, vamos definir a função exponencial e o logaritmo natural.

    ① Dado $x \in \mathbb{R}$, definimos

$$e^x \doteq \sup\{e^r : r \in \mathbb{Q},\ r \leq x\}.$$

Mostre que esta definição faz sentido e que se $x < y$ então $e^x < e^y$, para todos $x, y \in \mathbb{R}$. A função $\mathbb{R} \ni x \mapsto e^x \in (0,\infty)$ é chamada de *função exponencial* (de base e).

② Mostre que se $\{r_n\}$ é uma sequência crescente de racionais tal que $\lim_{n\to\infty} r_n = x$ então $\lim_{n\to\infty} e^{r_n} = e^x$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Use este fato para mostrar que $e^{x+y} = e^x e^y$ e $e^{rx} = (e^x)^r$ para todos $x, y \in \mathbb{R}$ e $r \in \mathbb{Q}$.

③ Mostre que $\lim_{n\to\infty} e^n = +\infty$ e $\lim_{n\to\infty} e^{-n} = 0$.

④ Usando o teorema do valor intermediário (que será visto em breve), concluímos que a função exponencial é sobrejetora, logo, admite uma inversa, a qual é denotada por $\log : (0,\infty) \to \mathbb{R}$. A função log é chamada de *logaritmo natural* e também denotada, às vezes, por ln.

⑤ Mostre que $\log 1 = 0$, $\log(xy) = \log x + \log y$ e $\log(\frac{x}{y}) = \log x - \log y$ para todos $x, y > 0$.

⑥ Mostre que $\log(x^r) = r \log x$, para todos $x > 0$ e $r \in \mathbb{Q}$.

⑦ Mostre que $x < y$ implica $\log x < \log y$.

⑧ Mostre que $\lim_{n\to\infty} \log n = +\infty$ e $\lim_{n\to\infty} \log\left(\frac{1}{n}\right) = -\infty$.

⑨ Use o binômio de Newton para mostrar que dados quaisquer $\alpha \in \mathbb{R}_+$ e $k \in \mathbb{N}$, temos

$$\lim_{n\to\infty} \frac{e^{\alpha n}}{n^k} = +\infty.$$

Em particular, dado $k \in \mathbb{N}$ existe $A > 0$ tal que $An^k \leq e^{\alpha n}$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

⑩ Mostre que dado qualquer $r \in \mathbb{Q}$, $r > 0$, existe $C > 0$ tal que $\log n \leq Cn^r$. Em particular, $\lim_{n\to\infty} \frac{\log n}{n^r} = 0$ para qualquer $r \in \mathbb{Q}$, $r > 0$.

25. Vamos usar o exercício anterior para definir potências com expoentes reais quaisquer.

Para passarmos a uma base qualquer $a > 0$, observamos que $a = e^{\log a}$, o que nos incentiva a *definir* a *função exponencial na base a* por

$$a^x \doteq e^{x \log a},$$

para qualquer $x \in \mathbb{R}$. A função exponencial na base a tem propriedades bastante semelhantes às da função exponencial natural. Mostre que:

① $a^0 = 1$, $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$ e $(a^x)^y = a^{xy}$ para $x, y \in \mathbb{R}$;

② A aplicação $x \mapsto a^x$ é uma bijeção crescente entre $\mathbb{R}$ e $(0,\infty)$ se $a > 1$ e decrescente se $0 < a < 1$;

③ A inversa da função exponencial na base a é chamada de *logaritmo na base a*, denotada por $\log_a$. Assim, $a^x = y$ se e só se $\log_a y = x$, para quaisquer $y > 0$ e $x \in \mathbb{R}$. Mostre que $\log_a 1 = 0$, $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$ e $\log_a(x^r) = r \cdot \log_a x$ para todos $x, y > 0$ e $r \in \mathbb{Q}$.

④ Mostre que $\log_a(x^y) = y \log_a x$ para todos $x > 0$ e $y \in \mathbb{R}$.

⑤ Mostre que $\log_a x = \frac{\log x}{\log a}$.

Parte 3

☆ Séries de números reais

1. Verifique se as séries abaixo convergem, justificando suas respostas:

   (1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+5}{(n+1)^3}$ (2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(1+n^2)^p}$, $p>0$ (3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+2^n}{1+3^n}$ (4) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+7}{9n-1}\right)^n$

   (5) $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n} n!$ (6) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$ (7) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n+2}$ (8) $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{1+n^2}-n)$

   (9) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)^n}{n^{2n}}$ (10) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n n^2}{n!}$ (11) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+1/n}}$ (12) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{n+2}}{\sqrt[4]{n^3+3}\,\sqrt[5]{n^3+7}}$

   (13) $\sum_{n=1}^{\infty} 5^n \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$ (14) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n^p e^n}$, $p>0$ (15) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\log n)^p}$, $p>0$ (16) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n^p}$, $p>0$

2. (Critério de comparação no limite) Sejam $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ séries de números reais e

$$\alpha \doteq \limsup_{n\to\infty} \frac{|x_n|}{|y_n|} \in [0,+\infty]\,.$$

   ① Se $0<\alpha<+\infty$ então $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ converge absolutamente se e só se $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ converge absolutamente.

   ② Se $\alpha=0$ e $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ converge absolutamente então $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ converge absolutamente.

   ③ Se $\alpha=+\infty$ e $\sum_{n=1}^{\infty} |y_n|$ diverge então $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|$ diverge.

   ④ Use este resultado para analisar as séries abaixo:

   (i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[8]{n^7+3n^3-2}}{\sqrt[6]{n^9+7n^2}}$

   (ii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n\log n)^p}$, $p>0$

   (iii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^p}{e^{-an}}$, $a,p>0$

3. Mostre que se $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ converge absolutamente então $\sum_{n=1}^{\infty} x_n^2$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{1+x_n}$ e $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n^2}{1+x_n^2}$ também convergem absolutamente.

4. Seja $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ uma série de termos positivos. Mostre que

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} \le \liminf_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} \le \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} \le \limsup_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}\,.$$

   Em particular, se existe $\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}$ então também existe $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n}$ e ambos são iguais.

5. Use o exercício anterior para calcular:

   (i) $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}}$

   (ii) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sqrt[n]{(n+1)(n+2)\cdot\ldots\cdot(2n)}$

   (iii) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{(2n)!}{n!^2}}$

6. Suponha que $\lim_{n\to\infty} x_n = a$.

   ① Mostre que $\lim_{n\to\infty} \frac{x_1+\ldots+x_n}{n} = a$.

② Se $x_n > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, mostre que $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_1 \cdot \ldots \cdot x_n} = a$. Conclua, em particular, que se existe o limite $\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}$ então existe $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n}$.

7. (Critério de condensação de Cauchy) Seja $\{x_n\}$ uma sequência monótona decrescente de números positivos. Mostre que $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ é convergente se e só se $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n x_{2^n}$ o é.

8. Use o exercício anterior para analisar as séries abaixo:

① $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$, $p > 0$

② $\sum_{n=1}^{\infty} n^p (\log n)^q$, $p, q \in \mathbb{R}$

③ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \log n \log\log n}$

9. Neste exercício, estudaremos o crescimento das somas parciais da série harmônica. Pressuporemos conhecimento elementar da integral de Riemann.

① Do cálculo I, sabemos que $\log x = \int_1^x \frac{dt}{t}$, para qualquer $x > 0$. Interpretando a integral como área abaixo do gráfico, mostre que

$$1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} \leq 1 + \log n,$$

para todo $n \geq 2$.

② Mostre que $\log 10 < \frac{12}{5}$ e conclua que para qualquer $m \in \mathbb{N}$,

$$1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{10^m} \leq 1 + \frac{12m}{5}.$$

Isso mostra que, embora a série harmônica seja divergente, suas somas parciais crescem muito lentamente. (Por exemplo, $1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{10^{1000}} \leq 2401$.)

③ Considere a sequência $x_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} - \log n$, $n \geq 1$. Mostre que $\{x_n\}$ é uma sequência decrescente limitada inferiormente. O número

$$\gamma \doteq \lim_{n\to\infty} 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} - \log n$$

é chamado de *constante de Euler-Mascheroni*.

10. Se p é um polinômio de grau maior que 1 então $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p(n)}$ converge.

11. Seja $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ uma série divergente de termos positivos e $x_n > 0$ tais que $\frac{x_{n+1}}{x_n} \geq \frac{y_{n+1}}{y_n}$ para todo n suficientemente grande. Mostre que $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ também é divergente.

12. Dada uma série $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$, seja $x_n^+ = \max\{x_n, 0\}$ e $x_n^- = \max\{-x_n, 0\}$, $n \in \mathbb{N}$. As séries $\sum_{n=1}^{\infty} x_n^+$ e $\sum_{n=1}^{\infty} x_n^-$ são chamadas de parte positiva e parte negativa da série $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$.

① Mostre que $x_n^+ \geq 0$, $x_n^- \geq 0$ e $x_n = x_n^+ - x_n^-$ e $|x_n| = x_n^+ + x_n^-$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

② Mostre que se $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ é condicionalmente convergente então $\sum_{n=1}^{\infty} x_n^+ = \sum_{n=1}^{\infty} x_n^- = +\infty$.

③ Mostre que se $\sum_{n=1}^{\infty} x_n^+ = \sum_{n=1}^{\infty} x_n^- = +\infty$ então $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ não pode ser absolutamente convergente.

④ Mostre que $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ é absolutamente convergente se e só se $\sum_{n=1}^{\infty} x_n^+$ e $\sum_{n=1}^{\infty} x_n^-$ o são e $\sum_{n=1}^{\infty} x_n = \sum_{n=1}^{\infty} x_n^+ - \sum_{n=1}^{\infty} x_n^-$.

13. Sejam $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ séries de números reais.

① Mostre que se $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ converge e $x_n \geq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ então $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{x_n x_{n+1}}$ converge.

② Encontre um exemplo em que $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ converge mas $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{x_n}$ diverge.

③ Mostre que se $\sum_{n=1}^{\infty} x_n^2$ e $\sum_{n=1}^{\infty} y_n^2$ convergem então $\sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n$ converge absolutamente e

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n y_n| \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} x_n^2\right)^{1/2} \left(\sum_{n=1}^{\infty} y_n^2\right)^{1/2}.$$

④ Mostre que se $\sum_{n=1}^{\infty} x_n^2$ e $\sum_{n=1}^{\infty} y_n^2$ convergem então $\sum_{n=1}^{\infty} (x_n + y_n)^2$ converge e

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} (x_n + y_n)^2\right)^{1/2} \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} x_n^2\right)^{1/2} + \left(\sum_{n=1}^{\infty} y_n^2\right)^{1/2}.$$

14. Seja $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ uma série e $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ uma função bijetora.

① Encontre uma série convergente $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ e uma bijeção $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tais que $\sum_{n=1}^{\infty} y_{\varphi(n)}$ não seja convergente.

② Se $x_n > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, mostre que $\sum_{n=1}^{\infty} x_n = \sup\left\{\sum_{n=1}^{N} x_n : N \in \mathbb{N}\right\}$.

③ Mostre que se $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ é absolutamente convergente então $\sum_{n=1}^{\infty} x_{\varphi(n)}$ o é e $\sum_{n=1}^{\infty} x_{\varphi(n)} = \sum_{n=1}^{\infty} x_n$.

15. Seja $\{u_n\}$ uma sequência de números positivos e definamos $p_n = u_1 \cdot \ldots \cdot u_n$, $n \geq 1$. Quando a sequência $\{p_n\}$ for converge para um número diferente de zero, dizemos que o *produto infinito* $\prod_{n=1}^{\infty} u_n$ *é convergente*, e o valor de $\prod_{n=1}^{\infty} u_n$ é, por definição, $\lim_{n\to\infty} p_n$.

① Mostre que $\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 \pm \frac{1}{n}\right)$ são divergentes.

② Mostre que se $\prod_{n=1}^{\infty} u_n$ converge então $x_n \to 0$.

③ Mostre que $\prod_{n=1}^{\infty} u_n$ converge se e só se $\sum_{n=1}^{\infty} \log a_n$ converge.

④ (Critério de Cauchy para produtos infinitos) Mostre que $\prod_{n=1}^{\infty} u_n$ converge para um número $\neq 0$ se e só se dado $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para qualquer $k > 0$ tem-se

$$|u_N u_{N+1} \cdot \ldots \cdot u_{N+k} - 1| < \varepsilon.$$

⑤ Use a desigualdade $1 + x \leq e^x$, válida para todo $x \in \mathbb{R}$, para mostrar que se $x_n > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, então $\prod_{n=1}^{\infty} (1 \pm x_n)$ converge se e só se $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ converge.

⑥ Verifique se os produtos infinitos abaixo são convergentes:

i. $\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{2}{n(n+1)}\right)$

ii. $\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{n^5+7n^2}{2^{n^2}}\right)$

iii. $\prod_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^3-1}{n^3+1}\right)$

iv. $\prod_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n^7+n^6-n+4}{n^7+3n^2-1}\right)$

v. $\prod_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n^2+3n-1}{2n^2+1}\right)$

⑦ Mostre (ou, pelo menos, convença-se!) que para qualquer $s>1$ temos

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}=\prod_{k=1}^{\infty}\frac{1}{1-p_k^{-s}},$$

onde $2=p_1<3=p_2<5=p_3<\dots$ denota a sequência dos inteiros primos. (Dica: Faça $P_m=\Pi_{k=1}^{m}\frac{1}{1-p_k^{-s}}$ e escreva cada fator $\frac{1}{1-p_k^{-s}}$ como soma de uma série geométrica. Mostre que $0\le\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}-P_m\le\sum_{n=m}^{\infty}\frac{1}{n^s}$ para todo $m\in\mathbb{N}$.)

16. Sejam $\sum_{n=1}^{\infty}x_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty}y_n$ séries de números reais. O *produto de Cauchy* de $\sum_{n=0}^{\infty}x_n$ e $\sum_{n=0}^{\infty}y_n$ é a série $\sum_{n=0}^{\infty}z_n$ cujo termo geral é $z_n\doteq\sum_{j=0}^{n}x_jy_{n-j}$, para cada $n\ge0$.

① Mostre que o produto de Cauchy da série $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$ por si mesma é uma série divergente.[4]

② Mostre que se $\sum_{n=0}^{\infty}x_n$ e $\sum_{n=0}^{\infty}y_n$ são *absolutamente convergentes* então o seu produto de Cauchy é convergente.

17. Sejam $\sum_{n=0}^{\infty}x_n$ uma série *absolutamente* convergente e $\sum_{n=0}^{\infty}y_n$ uma série convergente. Neste exercício, vamos provar o resultado originalmente devido a F. Mertens que diz que o produto de Cauchy $\sum_{n=0}^{\infty}z_n$ de $\sum_{n=0}^{\infty}x_n$ por $\sum_{n=0}^{\infty}y_n$ é convergente.

① Sejam $A_n=\sum_{j=0}^{n}x_j$, $B_n=\sum_{j=0}^{n}y_j$ e $C_n=\sum_{j=0}^{n}z_j$, $n\ge0$. Mostre que

$$C_n=\sum_{j=0}^{n}B_jx_{n-j}=\sum_{j=0}^{n}(B_j-B)x_{n-j}+BA_n$$

para cada $n\ge0$.

② Usando a expressão acima e o fato que $\sum_{n=0}^{\infty}x_n$ converge absolutamente, mostre que $\{C_n\}$ converge para AB.

18. Verifique se as séries abaixo convergem absolutamente, condicionalmente ou divergem:

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^nn^n}{(n+1)^{n+1}}$ (2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(1+n^2)^p}$, $p>0$ (3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ (4) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\log n}{n^p}$, $p>0$

(5) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^nn!e^{-n}$ (6) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(\log n)^p}$, $p>0$ (7) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sqrt{n}}{n+1}$ (8) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2\cdot4\cdot\ldots(2n)}{3\cdot5\cdot(2n+1)}$

☆ Topologia da reta

19. Sejam $X,Y\subset\mathbb{R}$ conjuntos abertos. Mostre que

① $X\cap Y$ e $X\cup Y$ são abertos;

② $X+Y$ é aberto;

③ $X\cdot Y$ é aberto;

[4]Dica: Mostre que o termo geral z_n da série produto é uma soma de $n+1$ parcelas que excedem, em módulo, $1/n+1$. Em particular, $|z_n|\ge1$ para todo $n\in\mathbb{N}$.

④ $\text{Int}(X \cap Y) = \text{Int}\, X \cap \text{Int}\, Y$ e $\text{Int}(X \cup Y) \supset \text{Int}\, X \cup \int Y$;

20. Prove os ítens (1), (2) e (3) do exercício anterior substituindo a palavra *abertos* por *fechados*. O ítem (4) é verdadeiro se substituirmos *interior* por *fecho*?

21. Mostre que as afirmações abaixo são equivalentes a respeito de um subconjunto não-vazio $X \subset \mathbb{R}$:

    ① X é limitado;

    ② Todo subconjunto infinito de X possui ponto de acumulação em $\mathbb{R}$.

    ③ Toda sequência em X possui subsequência convergente.

22. Se X é limitado superiormente, mostre que $\sup X$ é o maior ponto de acumulação de X. Analogamente para o ínfimo.

23. Mostre que $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ são densos em $\mathbb{R}$.

24. O *comprimento* de um intervalo limitado I é definido por $\ell(I) = \sup I - \inf I$. Caso I seja ilimitado, escrevemos $\ell(I) = \infty$.

    ① Mostre que $\ell(I \cup J) \leq \ell(I) + \ell(J)$, podendo ocorrer a desigualdade estrita.

    ② Se $\{I_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ é uma família de intervalos, tais que $[a, b] \subset \bigcup_{\lambda \in \Lambda} I_\lambda$ então existem $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \Lambda$ tais que $I \subset \bigcup_{j=1}^{n} I_{\lambda_j}$ e $\ell(I) \leq \sum_{j=1}^{n} \ell(I_{\lambda_j})$.

25. Mostre que a intersecção de uma família qualquer de compactos é compacta e a reunião de uma família finita de compactos é compacta.

✰ Limites e continuidade

26. Mostre que as funções abaixo são contínuas em seu domínio:

    ① $f(x) = \sqrt[n]{x}$, $n > 1$, $x > 0$;

    ② $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$, p, q polinômios em $\mathbb{R}$, com q não-identicamente nulo;

    ③ $f(x) = e^x$;

    ④ $f(x) = \log x$;

    ⑤ $f(x) = a^x$ e $g(x) = \log_a x$, para $a > 0$, $a \neq 1$

27. Seja $f : I \to \mathbb{R}$ uma função monótona, com $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo.

    ① Mostre que sempre existem os limites laterais $\lim_{x \to a^\pm} f(x)$ para qualquer $a \in I$.

    ② Mostre que o conjunto de pontos de descontinuidade de f é um subconjunto *enumerável* de I.

Parte 4 - COLETÂNEA

GRUPO 1

1. Seja $\{x_n\}$ uma sequência limitada e considere os números

$$a \doteq \sup\left\{x \in \mathbb{R} : x \text{ é ponto de aderência de } \{x_n\}\right\},$$

$b \doteq \lim_{n\to\infty} b_n$, onde $b_n \doteq \sup\{x_j : j \geq n\}$ e $c \doteq \inf\{x \in \mathbb{R} : \{n \in \mathbb{N} : x_n > x\}$ é finito$\}$.

Mostre que os números a, b, c são bem definidos e $a = b = c$. Este valor comum é chamado de $\limsup_{n\to\infty} x_n$. Prove uma afirmação análoga para $\liminf_{n\to\infty} x_n$.

2. Dada uma sequência $\{x_n\}$, um termo x_k chama-se *termo destacado de* $\{x_n\}$ se $x_k \geq x_n$ para todo $n \geq k$ e consideremos o conjunto $K = \{k \in \mathbb{N} : x_k$ é um termo destacado$\} = \{k_1 < k_2 < \ldots\}$.

① Se K é infinito, mostre que a subequência $\{x_{k_j}\}_{j\in\mathbb{N}}$ é não-crescente.

② Se K é finito, mostre que $\{x_n\}$ possui uma subsequência crescente.

③ Conclua que qualquer sequência limitada possui uma subsequência monótona.

④ Prove, a partir das afirmações acima, que toda sequência limitada de números reais possui uma subsequência convergente.

3. Neste problema vamos dar outra prova do fato que toda sequência limitada de números reais tem subsequência convergente. Para isso, seja $\{x_n\}$ uma sequência limitada de números reais.

① Seja $M > 0$ tal que $-M \leq x_n \leq M$, para todo $n \in \mathbb{N}$ e considere o conjunto $X = \{x \in \mathbb{R} : x \leq x_n$ para uma infinidade de $n \in \mathbb{N}\}$. Mostre que $\alpha \doteq \sup X$ é finito e $\alpha \leq M$.

② Mostre que para qualquer $\varepsilon > 0$ existe uma infinidade de $n \in \mathbb{N}$ tais que $\alpha - \varepsilon < x_n < \alpha + \varepsilon$.

③ Conclua que α é valor de aderência de $\{x_n\}$; em particular, existe uma subsequência $\{x_{n_j}\}_{j\in\mathbb{N}}$ tal que $\lim_{j\to\infty} x_{n_j} = a$.

4. (Critério de condensação de Cauchy) Seja $\{x_n\}$ uma sequência monótona decrescente de números positivos. Mostre que $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ é convergente se e só se $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n x_{2^n}$ o é. Use este critério para analisar a convergência das séries abaixo:

① $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$, $p > 0$

② $\sum_{n=1}^{\infty} n^p (\log n)^q$, $p, q \in \mathbb{R}$

③ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \log n \log\log n}$

5. **(Critério de Raabe)** Seja $\{x_n\}$ uma sequência de números não-nulos e

$$\alpha = \limsup_{n\to\infty} n\left(1 - \frac{|x_{n+1}|}{|x_n|}\right), \; \beta = \liminf_{n\to\infty} n\left(1 - \frac{|x_{n+1}|}{|x_n|}\right).$$

Mostre que se $\beta > 1$, a série $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ é absolutamente convergente e se $\alpha < 1$, a série $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ não é absolutamente convergente.

6. Analise a convergência da série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(a+1)(a+2)\dots(a+n)}{(b+1)(b+2)\dots(b+n)},$$

onde a, b são números positivos.

7. Neste exercício, estudaremos o crescimento das somas parciais da série harmônica. Pressuporemos conhecimento elementar da integral de Riemann.

   ① Do cálculo I, sabemos que $\log x = \int_1^x \frac{dt}{t}$, para qualquer $x > 0$. Interpretando a integral como área abaixo do gráfico, mostre que

   $$1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} \leq 1 + \log n,$$

   para todo $n \geq 2$.

   ② Mostre que $\log 10 < \frac{12}{5}$ e conclua que para qualquer $m \in \mathbb{N}$,

   $$1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{10^m} \leq 1 + \frac{12m}{5}.$$

   Isso mostra que, embora a série harmônica seja divergente, suas somas parciais crescem muito lentamente. (Por exemplo, $1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{10^{1000}} \leq 2401$.)

   ③ Considere a sequência $x_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \log n$, $n \geq 1$. Mostre que $\{x_n\}$ é uma sequência decrescente limitada inferiormente. O número

   $$\gamma \doteq \lim_{n\to\infty} 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \log n$$

   é chamado de *constante de Euler-Mascheroni.*

8. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função com as seguintes propriedades:

   ① f é uniformemente contínua em $\mathbb{R}$;

   ② Existem $A, c > 0$ tais que $|f(x)| > |x| + c$ para todo $x \in \mathbb{R}$ tal que $|x| \geq A$.

   Mostre que a função $g(x) = \sqrt{|x + f(x)|}$ também é uniformemente contínua em $\mathbb{R}$.

9. Seja $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ uma função contínua não-identicamente nula tal que $f(xy) = f(x) + f(y)$, para todos $x, y > 0$. Mostre que existe $a > 0$ tal que $f(x) = \log_a(x)$, para todo $x > 0$.

10. Sejam $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funções uniformemente contínuas.

    ① Mostre que $f \pm g$ é uniformemente contínua.

    ② Mostre que $f \vee g = \max\{f, g\}$ e $f \wedge g = \min\{f, g\}$ são uniformemente contínuas.

    ③ Assumindo que f e g são limitadas, mostre que fg é uniformemente contínua.

    ④ Encontre funções f, g uniformemente contínuas tais que fg não é uniformemente contínua.

11. Seja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tal que $\lim_{|x|\to\infty} f(x) = +\infty$. Mostre que existe $a \in \mathbb{R}$ tal que $f(a) \le f(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

12. Seja $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ uniformemente contínua. Mostre que existem $\lim_{x\to a^+} f(x)$ e $\lim_{x\to b^-} f(x)$.

13. Seja $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ contínua. Dado $\varepsilon > 0$ existem $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_N = b$ tais que, se $x, y \in [x_{i-1}, x_i]$ para algum i, então $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

14. Uma função $g:[a,b]\to\mathbb{R}$ é dita uma *função escada* se existem $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_N = b$ tais que a restrição de g a cada subintervalo (x_{i-1}, x_i) é constante. Se $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ é contínua, então, dado $\varepsilon > 0$, mostre que existe uma função escada $g:[a,b]\to\mathbb{R}$ tal que $|f(x)-g(x)| < \varepsilon$ para todo $x \in [a,b]$.

15. Seja $K \subset \mathbb{R}$ um conjunto compacto. Mostre que dada uma cobertura aberta $K \subset \bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda$ de K, existe $\delta > 0$ tal que se $x, y \in K$ e $|x-y| < \delta$, então existe $\lambda \in \Lambda$ tal que $x, y \in U_\lambda$. O número δ é chamado de *número de Lebesgue* da cobertura.

16. Seja $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo qualquer e $f: I \to \mathbb{R}$ uma função crescente contínua. Mostre que $f(I)$ é um intervalo e que a função inversa $f^{-1}: f(I) \to I$ é contínua.

17. Mostre que as seguintes afirmações a respeito de uma função $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ são equivalentes:

    ① $\lim_{x\to+\infty} |f(x)| = \lim_{x\to-\infty} |f(x)| = +\infty$.

    ② Se $\{x_n\}$ é uma sequência tal que $|x_n| \to +\infty$, então $|f(x_n)| \to +\infty$.

    ③ Se K é compacto então $f(K)$ é compacto.

    Uma função satisfazendo qualquer uma das relações acima é chamada de *própria*. Mostre que se f é uma bijeção própria então f^{-1} é contínua.

18. Seja $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ diferenciável e $a < c < d < b$ tais que $f'(c) = f'(d) = 0$. Mostre que existe no máximo um $x \in (x,d)$ tal que $f(x) = 0$.

19. Seja $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ diferenciável.

    ① Se $\lim_{x\to a^+} f'(x) = +\infty$ então $\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = +\infty$.

    ② Se $\sup_{a<x<b} |f'(x)| < \infty$ então f é uniformemente contínua e existem $\lim_{x\to a^+} f(x)$ e $\lim_{x\to b^-} f(x)$.

➘ ➘

GRUPO 2

20. Seja $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ uma série e $\varphi:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ uma função bijetora.

    ① Encontre uma série convergente $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ e uma bijeção $\varphi:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ tais que $\sum_{n=1}^{\infty} y_{\varphi(n)}$ não seja convergente.

    ② Se $x_n > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, mostre que $\sum_{n=1}^{\infty} x_n = \sup\left\{\sum_{n=1}^{N} x_n : N \in \mathbb{N}\right\}$.

    ③ Mostre que se $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ é absolutamente convergente então $\sum_{n=1}^{\infty} x_{\varphi(n)}$ o é e $\sum_{n=1}^{\infty} x_{\varphi(n)} = \sum_{n=1}^{\infty} x_n$.

21. Sejam $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ uma série *absolutamente* convergente e $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$ uma série convergente. Neste exercício, vamos provar o resultado originalmente devido a F. Mertens que diz que o produto de Cauchy $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ de $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ por $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$ é convergente.

① Sejam $A_n = \sum_{j=0}^{n} x_j$, $B_n = \sum_{j=0}^{n} y_j$ e $C_n = \sum_{j=0}^{n} z_j$, $n \geq 0$. Mostre que

$$C_n = \sum_{j=0}^{n} B_j x_{n-j} = \sum_{j=0}^{n} (B_j - B) x_{n-j} + B A_n$$

para cada $n \geq 0$.

② Usando a expressão acima e o fato que $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ converge absolutamente, mostre que $\{C_n\}$ converge para AB.

22. Seja $\{x_n\}$ uma sequência crescente de números positivos tal que $x_n \to \infty$. O *expoente de conergência* de $\{x_n\}$ é definido por

$$\sigma \doteq \inf\left\{\alpha \in \mathbb{R} : \sum_{n=1}^{\infty} x_n^{-\alpha} < \infty\right\}.$$

Mostre que $\sigma = \limsup_{n\to\infty} \frac{\log n}{\log x_n}$.

23. Dada uma série $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$, seja $x_n^+ = \max\{x_n, 0\}$ e $x_n^- = \max\{-x_n, 0\}$, $n \in \mathbb{N}$. As séries $\sum_{n=1}^{\infty} x_n^+$ e $\sum_{n=1}^{\infty} x_n^-$ são chamadas de parte positiva e parte negativa da série $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$.

① Mostre que $x_n^+ \geq 0$, $x_n^- \geq 0$ e $x_n = x_n^+ - x_n^-$ e $|x_n| = x_n^+ + x_n^-$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

② Mostre que se $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ é condicionalmente convergente então $\sum_{n=1}^{\infty} x_n^+ = \sum_{n=1}^{\infty} x_n^- = +\infty$.

③ Mostre que se $\sum_{n=1}^{\infty} x_n^+ = \sum_{n=1}^{\infty} x_n^- = +\infty$ então $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ não pode ser absolutamente convergente.

④ Mostre que $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ é absolutamente convergente se e só se $\sum_{n=1}^{\infty} x_n^+$ e $\sum_{n=1}^{\infty} x_n^-$ o são e $\sum_{n=1}^{\infty} x_n = \sum_{n=1}^{\infty} x_n^+ - \sum_{n=1}^{\infty} x_n^-$.

24. Sejam $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ séries de números reais.

① Mostre que se $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ converge e $x_n \geq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ então $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{x_n x_{n+1}}$ converge.

② Encontre um exemplo em que $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ converge mas $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{x_n}$ diverge.

③ Mostre que se $\sum_{n=1}^{\infty} x_n^2$ e $\sum_{n=1}^{\infty} y_n^2$ convergem então $\sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n$ converge absolutamente e

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n y_n| \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} x_n^2\right)^{1/2} \left(\sum_{n=1}^{\infty} y_n^2\right)^{1/2}.$$

④ Mostre que se $\sum_{n=1}^{\infty} x_n^2$ e $\sum_{n=1}^{\infty} y_n^2$ convergem então $\sum_{n=1}^{\infty} (x_n + y_n)^2$ converge e

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} (x_n + y_n)^2\right)^{1/2} \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} x_n^2\right)^{1/2} + \left(\sum_{n=1}^{\infty} y_n^2\right)^{1/2}.$$

25. Sejam $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ séries de números reais. O *produto de Cauchy* de $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ e $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$ é a série $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ cujo termo geral é $z_n \doteq \sum_{j=0}^{n} x_j y_{n-j}$, para cada $n \geq 0$.

① Mostre que o produto de Cauchy da série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$ por si mesma é uma série divergente. (Dica: Mostre que o termo geral z_n da série produto é uma soma de $n+1$ parcelas que excedem, em módulo, $1/n+1$.)

② Mostre que se $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ e $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$ são *absolutamente convergentes* então o seu produto de Cauchy é convergente.

26. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diferenciável tal que $\lim_{x\to+\infty} f'(x) = L$. Mostre que:

① $\lim_{x\to+\infty}\{f(x+c) - f(x)\} = cL$;

② $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = L$.

27. Seja $f : I \to \mathbb{R}$ diferenciável. Mostre que

$$\sup_{x\in I} |f'(x)| = \sup_{x,y\in I,\, x\neq y} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x-y|}.$$

Se algum dos números acima é finito, mostre que f é uniformemente contínua. Mostre que a recíproca deste fato é falsa, exibindo uma função uniformemente contínua para a qual os supremos acima são infinitos.

28. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diferenciável com $\sup_{x\in\mathbb{R}} |f'(x)| < \infty$. Mostre que existe $c > 0$ tal que a função $g(x) = x + cf(x)$ é bijetora e tem inversa diferenciável.

29. Sejam $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo e $f : I \to \mathbb{R}$ uma função. Para cada $x \in I$ e $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, definamos $M(x;\varepsilon) \doteq \sup\big\{|f(y) - f(z)| : \ y, z \in I \text{ e } |y-x| < \varepsilon, |z-x| < \varepsilon\big\}$. Evidentemente, para cada x fixado, a função $M(x;\varepsilon)$ é uma função crescente em ε, logo, podemos definir a *oscilação de f em x* por

$$\omega(x) \doteq \inf_{\varepsilon>0} M(x;\varepsilon) = \lim_{\varepsilon\to 0^+} M(x;\varepsilon).$$

Mostre que f é contínua em x se e só se $\omega(x) = 0$.

GRUPO 3

30. Neste exercício, vamos definir a função exponencial e o logaritmo natural. Você pode assumir os resultados demonstrados nos exercícios 16 - 19 da lista 2.

   ① Dado $x \in \mathbb{R}$, definimos
   $$e^x \doteq \sup\{e^r : r \in \mathbb{Q},\ r \leq x\}.$$
   Mostre que esta definição faz sentido e que se $x < y$ então $e^x < e^y$, para todos $x, y \in \mathbb{R}$. A função $\mathbb{R} \ni x \mapsto e^x \in (0, \infty)$ é chamada de *função exponencial* (de base e).

   ② Mostre que se $\{r_n\}$ é uma sequência crescente de racionais tal que $\lim_{n\to\infty} r_n = x$ então $\lim_{n\to\infty} e^{r_n} = e^x$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Use este fato para mostrar que $e^{x+y} = e^x e^y$ e $e^{rx} = (e^x)^r$ para todos $x, y \in \mathbb{R}$ e $r \in \mathbb{Q}$.

   ③ Mostre que $\lim_{n\to\infty} e^n = +\infty$ e $\lim_{n\to\infty} e^{-n} = 0$.

   ④ Usando o teorema do valor intermediário (que será visto em breve), concluímos que a função exponencial é sobrejetora, logo, admite uma inversa, a qual é denotada por $\log : (0, \infty) \to \mathbb{R}$. A função log é chamada de *logaritmo natural* e também denotada, às vezes, por ln.

   ⑤ Mostre que $\log 1 = 0$, $\log(xy) = \log x + \log y$ e $\log(\frac{x}{y}) = \log x - \log y$ para todos $x, y > 0$.

   ⑥ Mostre que $\log(x^r) = r \log x$, para todos $x > 0$ e $r \in \mathbb{Q}$.

   ⑦ Mostre que $x < y$ implica $\log x < \log y$.

   ⑧ Mostre que $\lim_{n\to\infty} \log n = +\infty$ e $\lim_{n\to\infty} \log\left(\frac{1}{n}\right) = -\infty$.

   ⑨ Use o binômio de Newton para mostrar que dados quaisquer $\alpha \in \mathbb{R}_+$ e $k \in \mathbb{N}$, temos
   $$\lim_{n\to\infty} \frac{e^{\alpha n}}{n^k} = +\infty.$$
   Em particular, dado $k \in \mathbb{N}$ existe $A > 0$ tal que $An^k \leq e^{\alpha n}$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

   ⑩ Mostre que dado qualquer $r \in \mathbb{Q}$, $r > 0$, existe $C > 0$ tal que $\log n \leq Cn^r$. Em particular, $\lim_{n\to\infty} \frac{\log n}{n^r} = 0$ para qualquer $r \in \mathbb{Q}$, $r > 0$.

31. Vamos usar o exercício anterior para definir potências com expoentes reais quaisquer.

   Para passarmos a uma base qualquer $a > 0$, observamos que $a = e^{\log a}$, o que nos incentiva a *definir* a *função exponencial na base a* por
   $$a^x \doteq e^{x \log a},$$
   para qualquer $x \in \mathbb{R}$. A função exponencial na base a tem propriedades bastante semelhantes às da função exponencial natural. Mostre que:

   ① $a^0 = 1$, $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$ e $(a^x)^y = a^{xy}$ para $x, y \in \mathbb{R}$;

   ② A aplicação $x \mapsto a^x$ é uma bijeção crescente entre $\mathbb{R}$ e $(0, \infty)$ se $a > 1$ e decrescente se $0 < a < 1$;

   ③ A inversa da função exponencial na base a é chamada de *logaritmo na base a*, denotada por $\log_a$. Assim, $a^x = y$ se e só se $\log_a y = x$, para quaisquer $y > 0$ e $x \in \mathbb{R}$. Mostre que $\log_a 1 = 0$, $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$ e $\log_a(x^r) = r \cdot \log_a x$ para todos $x, y > 0$ e $r \in \mathbb{Q}$.

④ Mostre que $\log_a(x^y) = y\log_a x$ para todos $x > 0$ e $y \in \mathbb{R}$.

⑤ Mostre que $\log_a x = \frac{\log x}{\log a}$.

32. Seja $\{u_n\}$ uma sequência de números positivos e definamos $p_n = u_1 \cdot \ldots \cdot u_n$, $n \geq 1$. Quando a sequência $\{p_n\}$ for converge para um número diferente de zero, dizemos que o *produto infinito* $\prod_{n=1}^{\infty} u_n$ *é convergente*, e o valor de $\prod_{n=1}^{\infty} u_n$ é, por definição, $\lim_{n\to\infty} p_n$.

① Mostre que $\prod_{n=1}^{\infty}\left(1 \pm \frac{1}{n}\right)$ são divergentes.

② Mostre que se $\prod_{n=1}^{\infty} u_n$ converge então $x_n \to 0$.

③ Mostre que $\prod_{n=1}^{\infty} u_n$ converge se e só se $\sum_{n=1}^{\infty} \log a_n$ converge.

④ (Critério de Cauchy para produtos infinitos) Mostre que $\prod_{n=1}^{\infty} u_n$ converge para um número $\neq 0$ se e só se dado $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para qualquer $k > 0$ tem-se

$$|u_N u_{N+1} \cdot \ldots \cdot u_{N+k} - 1| < \varepsilon\,.$$

⑤ Use a desigualdade $1 + x \leq e^x$, válida para todo $x \in \mathbb{R}$, para mostrar que se $x_n > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, então $\prod_{n=1}^{\infty}(1 \pm x_n)$ converge se e só se $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ converge.

⑥ Verifique se os produtos infinitos abaixo são convergentes:

i. $\prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{2}{n(n+1)}\right)$

ii. $\prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{n^5+7n^2}{2^{n^2}}\right)$

iii. $\prod_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n^3-1}{n^3+1}\right)$

iv. $\prod_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n^7+n^6-n+4}{n^7+3n^2-1}\right)$

v. $\prod_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n^2+3n-1}{2n^2+1}\right)$

⑦ Mostre que para qualquer $s > 1$ temos

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1 - p_k^{-s}}\,,$$

onde $2 = p_1 < 3 = p_2 < 5 = p_3 < \ldots$ denota a sequência dos inteiros primos. (Dica: Faça $P_m = \Pi_{k=1}^{m} \frac{1}{1-p_k^{-s}}$ e escreva cada fator $\frac{1}{1-p_k^{-s}}$ como soma de uma série geométrica. Mostre que $0 \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} - P_m \leq \sum_{n=m}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ para todo $m \in \mathbb{N}$.)

33. Uma função $f : X \to \mathbb{R}$ é dita *semicontínua superiormente* no ponto $a \in X$ se dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $f(x) < f(a) + \varepsilon$ para todo $x \in (a, a+\delta) \cap X$. f é dita semicontínua superiormente se o for em cada ponto de X. Vamos abreviar a expressão *semicontínua superiormente* por *scs*.

① Mostre que a soma de duas funções scs é scs e o produto de uma função scs por um número não-negativo é scs.

② Mostre que o produto de duas funções scs não-negativas é scs.

③ A *função característica de* $A \subset \mathbb{R}$ é definida como $\chi_A(x) = 1$ se $x \in A$ e $\chi_A(x) = 0$ se $x \notin A$. Mostre que $A \subset \mathbb{R}$ é aberto se e só se χ_A é scs.

④ Dados $a \in X$ e $\varepsilon > 0$, definimos $N(a;\varepsilon) = \sup\{f(y) : y \in X \cap (a-\varepsilon, a+\varepsilon)\}$. Como a função $N(a;\varepsilon)$ é crescente em ε para cada $a \in X$ fixado, podemos definir

$$\limsup_{x\to a} f(x) \doteq \inf_{\varepsilon>0} N(a;\varepsilon) = \lim_{\varepsilon\to 0^+} N(a;\varepsilon).$$

Mostre que f é scs no ponto a se e só se $\limsup_{x\to a} f(x) \le f(a)$.

⑤ Mostre que se X é compacto então toda função scs assume seu valor máximo em X.

⑥ Defina semicontinuidade inferior e prove resultados análogos aos anteriores neste caso. Mostre que f é contínua em a se e só se é semicontínua superiormente e inferiormente em a.

34. Uma função $f : I \to \mathbb{R}$ é dita *convexa* se dados $x < y$ em I e $0 \le t \le 1$, tem-se $f((1-t)x + ty) \le (1-t)f(x) + tf(y)$. Mostre que as afirmações abaixo são equivalentes a respeito de uma função de classe C^2:

① f é convexa.

② Dados $x_1, \dots, x_n \in I$ e $0 \le t_1, \dots, t_n \le 1$ tais que $\sum_{j=1}^n t_j = 1$, temos $f\left(\sum_{j=1}^n t_j x_j\right) \le \sum_{j=1}^n t_j f(x_j)$.

③ $f''(x) \ge 0$ para todo $x \in I$.

Use esta caracterização de funções convexas para provar as seguintes desigualdades:

① **(Desigualdade de Young)** Se $a, b, \alpha, \beta \ge 0$ e $\alpha + \beta = 1$ então $a^\alpha b^\beta \le \alpha a + \beta b$.

② **(Desigualdade de Hölder)** Se p, q são positivos e $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ então $|xy| \le \frac{|x|^p}{p} + \frac{|y|^q}{q}$ para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$.

③ **(Desigualdade de Hölder)** Se $x_j, y_j \in \mathbb{R}$ e $p, q > 0$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ então

$$\sum_{j=1}^n |x_j y_j| \le \left\{\sum_{j=1}^n |x_j|^p\right\}^{\frac{1}{p}} \left\{\sum_{j=1}^n |y_j|^q\right\}^{\frac{1}{q}}.$$

④ **(Desigualdade de Minkowski)** Se $x_j, y_j \in \mathbb{R}$ e $p > 0$ então

$$\left\{\sum_{j=1}^n |x_j + y_j|^p\right\}^{\frac{1}{p}} \le \left\{\sum_{j=1}^n |x_j|^p\right\}^{\frac{1}{p}} + \left\{\sum_{j=1}^n |y_j|^p\right\}^{\frac{1}{p}}.$$