UFPR - Universidade Federal do Paraná
Departamento de Matemática
CM095 - Análise I
Prof. José Carlos Eidam

GABARITO DA PRIMEIRA PROVA - 28/09/2011

Questão 1 Sejam X, Y subconjuntos não-vazios de números reais e admita que $x \le y$ para todos $x \in X$ e $y \in Y$.

(a) **(1 ponto)** Mostre que $\sup X \le \inf Y$.

Solução. Cada $y \in Y$ é uma cota superior para X, portanto, $\sup X \le y$ para todo $y \in Y$. Disso, $\sup X$ é uma cota inferior para Y, e portanto, $\sup X \le \inf Y$. ∎

(b) **(2 pontos)** Suponha que para cada $\varepsilon > 0$ existam $x \in X$ e $y \in Y$ tais que $y - x < \varepsilon$. Mostre que $\sup X = \inf Y$.

Solução. Já sabemos que $\sup X \le \inf Y$. Dado $\varepsilon > 0$, sejam $x \in X$ e $y \in Y$ tais que $y - x < \varepsilon$. Isso implica que

$$\inf Y \le y < x + \varepsilon \le \sup X + \varepsilon\,.$$

Como $\varepsilon > 0$ é arbitrário, segue que $\inf Y \le \sup X$, e, portanto, $\inf Y = \sup X$. ∎

Questão 2

(a) **(2 pontos)** Encontre um número racional r tal que $\sqrt{17} < r < \sqrt{19}$.

Solução. Como $16 < 17 < 19 < 25$, sabemos que $4 < \sqrt{17} < \sqrt{19} < 5$. Conforme demonstramos em sala, para obter um racional $r = \frac{m}{n}$ satisfazendo $\sqrt{17} < r < \sqrt{19}$, devemos tomar o inteiro n de forma que

$$\frac{1}{n} < \sqrt{19} - \sqrt{17} = \frac{2}{\sqrt{19} + \sqrt{17}}\,.$$

Como $\frac{2}{\sqrt{17}+\sqrt{19}} > \frac{2}{5+5} = \frac{1}{5}$, então $n = 5$ serve. Para achar m, devemos impor a condição $\sqrt{17} < \frac{m}{5} < \sqrt{19}$. Elevando ao quadrado ambos os membros, concluímos que $425 = 25 \cdot 17 < m^2 < 25 \cdot 19 = 475$. Esta condição é satisfeita para $m = 21$. Assim, podemos tomar $r = 21/5$. ∎

(b) **(2 pontos)** Considere o conjunto

$$Y = \left\{ y \in \mathbb{R} : y = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \text{ para algum } x > 0 \right\}.$$

Mostre que $\sup Y = 1$ e $\inf Y = 0$.

Solução. Inicialmente, vemos que, $x^2 < 1 + x^2$, logo, extraindo a raiz quadrada, temos que $0 < \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} < 1$, para qualquer $x > 0$. Assim, $\inf Y \ge 0$ e $\sup Y \le 1$.

Provemos que $\inf Y = 0$. De fato, como $\sqrt{1+x^2} > 1$, segue que $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} < x$ para qualquer $x > 0$. Em particular, dado $\varepsilon > 0$ temos que $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} < \varepsilon$ se $0 < x < \varepsilon$.

Provemos que $\sup Y = 1$. Estimando a diferença $1 - \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ obtemos

$$1 - \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{\sqrt{1+x^2} - x}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}\left(\sqrt{1+x^2}+x\right)} \leq \frac{1}{\sqrt{1+x^2}\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{1+x^2}.$$

Assim, dado $0 < \varepsilon < 1$, temos que $1 - \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} < \varepsilon$ desde que $x > \sqrt{\frac{1}{\varepsilon} - 1}$. Isso prova que $\sup Y = 1$.

∎

Questão 3 Dado um número real $a > 0$ e um inteiro $n > 0$, provamos em aula que existe um único número real $c > 0$ tal que $c^n = a$. Este número c é chamado de *raiz n-ésima (positiva)* de a e denotado por $\sqrt[n]{a}$.

(a) **(1,5 ponto)** Mostre que $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}$ e $\sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m$ para quaisquer $a, b > 0$, $n > 0$ e m inteiro.

Solução. O número $\sqrt[n]{ab}$ é definido pela igualdade $(\sqrt[n]{ab})^n = ab$. Como

$$(\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b})^n = (\sqrt[n]{a})^n(\sqrt[n]{b})^n = ab,$$

segue, por unicidade, que $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}$. Fazendo $b = a$, temos $\sqrt[n]{a^2} = (\sqrt[n]{a})^2$; o resultado geral segue por indução. ∎

(b) **(1,5 ponto)** Mostre que dados m, n inteiros com $n > 0$ e $a > 0$ um número real, temos

$$\sqrt[nk]{a^{mk}} = \sqrt[n]{a^m}$$

para qualquer $k > 0$. Dado $r = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$ com m, n inteiros e $n > 0$, definimos

$$a^r \doteq \sqrt[n]{a^m}.$$

Mostre que esta é uma boa definição, ou seja, independe de m e n.

Solução. Temos, por definição, que $(\sqrt[n]{a^m})^n = a^m$. Assim,

$$\left(\sqrt[n]{a^m}\right)^{nk} = \left(\left(\sqrt[n]{a^m}\right)^n\right)^k = \left(a^m\right)^k = a^{mk},$$

logo, por definição, $\sqrt[nk]{a^{mk}} = \sqrt[n]{a^m}$.

∎

(c) **(1,5 ponto)** Mostre que $a^{r+s} = a^r \cdot a^s$ e $(a^r)^s = a^{rs}$ para quaisquer $r, s \in \mathbb{Q}$.

Solução. Sejam $r = m/n$ e $s = p/q$; assim, $r + s = \frac{mq+pn}{nq}$ e $rs = mp/nq$, logo,

$$a^{r+s} = a^{\frac{mq+pn}{nq}} = \sqrt[nq]{a^{mq+pn}} = \sqrt[nq]{a^{mq}a^{pn}} = \sqrt[nq]{a^{mq}}\sqrt[nq]{a^{pn}} = a^r a^s$$

e

$$(a^r)^s = \sqrt[q]{(a^r)^p} = \sqrt[q]{\sqrt[n]{a^{mp}}} = \sqrt[qn]{a^{mp}} = a^{mp/qn} = a^{rs}.$$

∎