UFPR - Universidade Federal do Paraná
Departamento de Matemática
CM095 - Análise I
Prof. José Carlos Eidam

GABARITO DA SEGUNDA PROVA - 31/10/2011

Questão 1 Prove as afirmações abaixo:

(a) **(1,5 ponto)** Dada uma sequência limitada $\{x_n\}$, temos que existe $\alpha = \lim_{n\to\infty} x_n$ se e só se

$$\limsup_{n\to\infty} x_n = \liminf_{n\to\infty} x_n = \alpha\,.$$

Solução. Admitindo que a igualdade acima seja verdadeira, e lembrando que $\liminf_{n\to\infty} x_n$ e $\limsup_{n\to\infty} x_n$ são o menor e o maior ponto de acumulação de $\{x_n\}$, respectivamente, dado qualquer $\varepsilon > 0$, podemos obter n_0, n_1 tais que $x_n < \alpha+\varepsilon$ se $n \geq n_0$ e $\alpha - \varepsilon < x_n$ se $n \geq n_1$. Assim, se $n \geq \max\{n_0, n_1\}$, segue que $|x_n - \alpha| < \varepsilon$.

Reciprocamente, se $\alpha = \lim_{n\to\infty} x_n$, então, em particular, α é o único ponto de aderência de $\{x_n\}$ (porque?...), logo, como $\liminf_{n\to\infty} x_n$ e $\limsup_{n\to\infty} x_n$ são pontos de acumulação de $\{x_n\}$, segue que ambos são iguais a α. ∎

(b) **(1,5 ponto)** Se $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ são sequências de números positivos tais que $\liminf_{n\to\infty} x_n > 0$ e $\lim_{n\to\infty} y_n = 0$ então $\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = +\infty$.

Solução. Dizer que $\liminf_{n\to\infty} x_n > 0$ é equivalente a dizer que existem $c > 0$ e $n_0 \in \mathbb{N}$ tais que $x_n \geq c$ para todo $n \geq n_0$. Escolhendo $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $|y_n| < \varepsilon/c$ se $n \geq n_1$ e tomando $n_2 = \max\{n_0, n_1\}$, temos que $\left|\frac{x_n}{y_n}\right| \leq \frac{c}{|y_n|} < \varepsilon$ para todo $n \geq n_2$. Logo, $\frac{x_n}{y_n} \to 0$. ∎

(c) **(1,5 ponto)** Se $\{x_n\}$ é uma sequência para a qual existem $0 < a < b$ tais que $a \leq x_n \leq b$, para todo $n \in \mathbb{N}$, então $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} = 1$.

Solução. Basta observar que $\sqrt[n]{a} \leq \sqrt[n]{x_n} \leq \sqrt[n]{b}$ e fazer $n \to \infty$, usando o mesmo argumento do ítem abaixo e o fato que $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{b} = 1$. ∎

(d) **(1,5 ponto)** Se $\{x_n\}, \{y_n\}, \{z_n\}$ são sequências de números reais tais que $\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} z_n = a$ e existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$x_n + \frac{n^{2011} - 29n^3 + 11}{3^n} \leq y_n + \frac{n^2+n-1}{n^4-3n+15} \leq z_n - \frac{(n+1)^n}{n^{n+6}}$$

para todo $n \geq N$, então $\lim_{n\to\infty} y_n = a$.

Solução. Vimos em aula que $\lim_{n\to\infty} \frac{n^k}{a^n} = 0$ para quaisquer $a > 0$ e $k \in \mathbb{N}$, logo, $\lim_{n\to\infty} \frac{n^{2011}-29n^3+11}{3^n} = 0$. Também sabemos que $\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+n-1}{n^4-3n+15} = \lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}}{n^2-\frac{3}{n}+\frac{15}{n^2}} = 0$. Além disso,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^n}{n^{n+6}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^6}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 0 \cdot e = 0\,.$$

Chamando de x'_n, y'_n e z'_n as sequências $x_n + \frac{n^{2011}-29n^3+11}{3^n}$, $y_n + \frac{n^2+n-1}{n^4-3n+15}$ e $z_n - \frac{(n+1)^n}{n^{n+6}}$, respectivamente, temos que $\lim_{n\to\infty} x'_n = \lim_{n\to\infty} z'_n = a$ e $x'_n \le y'_n \le z'_n$ para todo $n \ge N$. Logo, dado $\varepsilon > 0$, podemos obter $n_0 \ge N$ tal que se $n \ge n_0$ então

$$\alpha - \varepsilon < x'_n \le y'_n \le z'_n < \alpha + \varepsilon .$$

Em particular, $|y'_n - \alpha| < \varepsilon$ se $n \ge n_0$. Como $y_n = y'_n - \frac{n^2+n-1}{n^4-3n+15}$, temos que $\lim_{n\to\infty} y_n = a - 0 = a$. ∎

Questão 2 Sejam $a > b > 0$ números reais e defina $a_1 = \frac{a+b}{2}$, $b_1 = \sqrt{ab}$ e

$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \quad \text{e} \quad b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n},$$

para cada $n \ge 0$.

(a) **(2 pontos)** Mostre que $\{a_n\}$ é decrescente, $\{b_n\}$ é crescente e $a_n > b_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Solução. Temos que $0 \le (x-y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$, i.e., $xy \le \frac{x^2+y^2}{2}$, para todos $x, y \in \mathbb{R}$. Se $x, y > 0$, podemos aplicar esta última desigualdade com $\sqrt{x}$ e $\sqrt{y}$ em lugar de x e y, respectivamente, para concluir que $\sqrt{xy} \le \frac{x+y}{2}$. Em particular, $b_n < a_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Logo, $a_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2} > \frac{a_n+a_n}{2} = a_n$ e $b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n} < \sqrt{b_n b_n} = b_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

∎

(b) **(2 pontos)** Mostre que $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n$. Este limite comum é chamado de *média aritmética-geometrica* de a e b e denotado por $M(a,b)$. Mostre que

$$\sqrt{ab} < M(a,b) < \frac{a+b}{2}.$$

Solução. Como $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ são sequências monótonas limitadas, existem $\alpha = \lim_{n\to\infty} a_n$ e $\beta = \lim_{n\to\infty} b_n$. Fazendo $n \to \infty$ na igualdade $a_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2}$, temos $\alpha = \frac{\alpha+\beta}{2}$, logo $\alpha = \beta$. Temos que $\sqrt{ab} = b_1 \le \beta = \alpha \le \frac{a+b}{2}$.

∎