UFPR - Universidade Federal do Paraná
Departamento de Matemática
CM095 - Análise I
Prof. José Carlos Eidam

GABARITO DA TERCEIRA PROVA - 30/11/2011

Questão 1 Classifique as séries abaixo em absolutamente convergentes, condicionalmente convergentes ou divergentes, justificando todas as suas afirmações. Cada ítem vale **1 ponto**.

(a) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{(2n)!}{5^n (n!)^2}$

Solução. Pelo critério da razão, temos que $\frac{|x_{n+1}|}{|x_n|} = \frac{2}{5}\frac{2n+1}{n+1} \to \frac{4}{5} < 1$, logo a série converge absolutamente. ∎

(b) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n f\left(\frac{1}{n}\right)$, onde $f : (0,\infty) \to (0,\infty)$ é uma função decrescente tal que $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0$ e $\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{\sqrt[3]{x}} = 2011$.

Solução. A série converge, pelo critério de Dirichlet para séries alternadas. Para testar convergência absoluta, usamos o critério de comparação no limite, com $a_n = f(n)$ e $b_n = 1/\sqrt[3]{n}$: temos que $a_n/b_n \to 2011$, logo, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge, pois $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverge. Assim, a série converge condicionalmente.

∎

(c) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n}\sqrt{\log n}}$

Solução. Vimos que dado $\alpha > 0$ existe uma constante $C > 0$ tal que $\log n \le Cn^{\alpha}$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Logo,

$$\frac{1}{\sqrt[3]{n}\sqrt{\log n}} \ge \frac{1}{\sqrt{C}}\frac{1}{n^{\alpha/2+1/3}},$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Escolhendo $0 < \alpha \le 4/3$, vemos que a série não converge absolutamente, pelo critério de comparação. Porém, como a função $g(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x}\sqrt{\log x}}$ é crescente e tem limite zero quando $x \to \infty$, segue que a série converge, pelo critério de Leibniz. Assim, a série converge condicionalmente. ∎

Questão 2 Prove as afirmações abaixo:

(a) **(2 pontos)** A função $f(x) = \sqrt{|x|}$ é uniformemente contínua em $\mathbb{R}$.

Solução. A função f é contínua, e portanto, uniformemente contínua, no intervalo $[-1,1]$. Por outro lado, temos

$$|f(x) - f(y)| = |\sqrt{|x|} - \sqrt{|y|}| = \frac{||x| - |y||}{\sqrt{|x|} + \sqrt{|y|}} \le \frac{1}{2}|x - y|,$$

se $|x|, |y| \ge 1$. Em particular, f é uniformemente contínua em $(-\infty,-1] \cup [1,\infty)$. Isso implica que f é uniformemente contínua em $\mathbb{R}$. ∎

(b) **(1,5 ponto)** O polinômio $p(x) = x^4 - 4x^3 + 4x^2 - \frac{1}{2}$ tem exatamente quatro raízes reais.

Solução. Basta ver que $f(0) < 0$, $f(1) > 0$, $f(2) < 0$ e usar o teorema do valor intermediário. ∎

Questão 3 Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função *contínua*, não identicamente nula, tal que $f(x + y) = f(x)f(y)$ para todos $x, y \in \mathbb{R}$.

(a) **(1 ponto)** Mostre que $f(x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Solução. Se para um certo $x \in \mathbb{R}$ tivermos que $f(x) = 0$, então $f(y) = f(x + (y - x)) = f(x)f(y - x) = 0$ para todo $y \in \mathbb{R}$, logo, $f(x) \neq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Pela continuidade de f e pelo teorema do valor intermediário, temos que $f(x) > 0$ ou $f(x) < 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Como $f(x) = f(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}) = f(\frac{x}{2})^2 \geq 0$, segue que $f(x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. ∎

(b) **(1 ponto)** Mostre que existe $a \in \mathbb{R}$ tal que $f(n) = a^n$, para todo $n \in \mathbb{Z}$.

Solução. Tomando $a = f(1)$, temos, por indução, que $f(n) = a^n$ para todo $n \in \mathbb{Z}$. ∎

(c) **(1 ponto)** Mostre que $f(r) = a^r$ para todo $r \in \mathbb{Q}$.

Solução. Dado $r = \frac{m}{n}$, com $m, n \in \mathbb{Z}$, $n \neq 0$, temos que $m = nr = \underbrace{r + \ldots + r}_{n \text{ vezes}}$, logo,

$$a^m = f(m) = f(\underbrace{r + \ldots + r}_{n \text{ vezes}}) = f(r)^n,$$

e, portanto, $f(r) = a^{m/n}$. ∎

(d) **(1,5 ponto)** Conclua que $f(x) = a^x$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

Solução. Dado $x \in \mathbb{R}$, tomando $\{r_n\}$ uma sequência de racionais convergindo para x, temos, pela continuidade de f, que $f(x) = \lim_{n\to\infty} f(r_n) = \lim_{n\to\infty} a^{r_n} = a^x$. ∎