UFPR - Universidade Federal do Paraná
Departamento de Matemática
CM095 - Análise I
Prof. José Carlos Eidam

GABARITO DA QUARTA PROVA - 21/12/2011

Questão 1 Considere a função $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dada por $f(x)=e^x+3x^5+10x^3+15x$.

(a) **(2 pontos)** Mostre que f é bijetora, crescente e $f(\mathbb{R})=\mathbb{R}$.

Solução. Temos que $f'(x)=e^x+15(x^2+1)\geq 15>0$ para todo $x\in\mathbb{R}$, logo, f é crescente. Como $\lim_{x\to+\infty}e^x=\lim_{x\to+\infty}3x^5+10x^3+15x=+\infty$, $\lim_{x\to-\infty}e^x=0$ e $\lim_{x\to-\infty}3x^5+10x^3+15x=-\infty$, concluímos que $\lim_{x\to\pm\infty}f(x)=\pm\infty$. Em particular, pelo teorema do valor intermediário, segue que a imagem de f é $\mathbb{R}$ e, portanto, f é bijetora. ∎

(b) **(2 pontos)** Seja $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ a inversa de f. Mostre que

$$|g(x)-g(y)|\leq\frac{1}{15}|x-y|,$$

para quaisquer $x,y\in\mathbb{R}$.

Solução.

Basta observar que se $f(x)=y$ então $|g'(y)|=\frac{1}{|f'(x)|}\leq\frac{1}{15}$, para qualquer $y\in\mathbb{R}$. A desigualdade acima decorre do teorema do valor médio.

∎

Questão 2 Seja $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ uma função de classe C^2. Um ponto $x_0\in(a,b)$ é dito *ponto de inflexão de f* se existe $\delta>0$ tal que $f''(x)$ e $f''(y)$ são não-nulos e têm sinais opostos, para quaisquer $x_0-\delta<x<x_0<y<x_0+\delta$.

(a) **(1 ponto)** Mostre que se $x_0\in(a,b)$ é um ponto de inflexão então $f''(x_0)=0$.

Solução. Se $f''<0$ à esquerda de x_0 e $f''>0$ à direita de x_0, então, como f'' é contínua, devemos ter $f''(x_0)=\lim_{x\to x_0^+}f''(x)\geq 0$ e $f''(x_0)=\lim_{x\to x_0^-}f''(x)\leq 0$, provando que $f''(x_0)=0$. Um raciocínio inteiramente análogo funciona no caso em que $f''>0$ à esquerda de x_0 e $f''<0$ à direita de x_0. ∎

(b) **(3 pontos)** Mostre que se f é de classe C^3 e $x_0\in(a,b)$ é um ponto crítico e também de inflexão de f tal que $f'''(x_0)\neq 0$ então x_0 *não é* nem máximo nem mínimo local para f.

Solução.

Pela fórmula de Taylor com resto infinitesimal, existe uma função r definida em um intervalo aberto I contendo x_0 tal que

$$f(x)-f(x_0)=\left(\frac{f'''(x_0)}{3!}-\frac{r(x)}{(x-x_0)^3}\right)(x-x_0)^3,$$

para todo $x\in I$, onde $\frac{r(x)}{(x-x_0)^3}\to 0$ quando $x\to x_0$. Digamos que $f'''(x_0)>0$. Logo, existe $\delta>0$ tal que $\left|\frac{r(x)}{(x-x_0)^3}\right|<\frac{f'''(x_0)}{3!2}$ se $|x-x_0|<\delta$. Em particular, a expressão entre parênteses é positiva se $|x - x_0| < \delta$. Assim, $f(x) < f(x_0)$ se $x_0 - \delta < x < x_0$ e $f(x_0) < f(x)$ se $x_0 < x < x_0 + \delta$, portanto, x_0 não é ponto de máximo nem de mínimo local para f. Uma análise semelhante funciona no caso $f'''(x_0) < 0$.

∎

Questão 3 Seja $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ uma função duas vezes diferenciável no ponto $x_0 \in (a, b)$. Use a fórmula de Taylor com resto infinitesimal para mostrar que as igualdades abaixo são verdadeiras:

(a) **(2 pontos)**

$$f''(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h) + f(x_0 - h) - 2f(x_0)}{h^2}.$$

(b) **(2 pontos)**

$$f''(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + 2h) - 2f(x_0 + h) + f(x_0)}{h^2}$$

Solução.

Pela fórmula de Taylor com resto infinitesimal, existe uma função r definida numa vizinhança de x_0 tal que $f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)h + \frac{f''(x_0)}{2}h^2 + r(h)$, $f(x_0 - h) = f(x_0) - f'(x_0)h + \frac{f''(x_0)}{2}h^2 + r(-h)$ e $r(t)/t^3 \to 0$ quando $t \to 0$. Somando estas igualdades e dividindo por h^2, obtemos

$$\frac{f(x_0 + h) + f(x_0 - h) - 2f(x_0)}{h^2} = f''(x_0) + \frac{r(h)}{h^2} + \frac{r(-h)}{h^2} \to f''(x_0), \quad h \to 0,$$

pois $|\frac{r(\pm h)}{h^2}| = |h||\frac{r(\pm h)}{(\pm h)^3}| \to 0$ quando $h \to 0$. A outra igualdade é totalmente análoga.

∎