UFPR - Universidade Federal do Paraná
Departamento de Matemática
Prof. José Carlos Eidam
CM041 - Cálculo I - Turma C - 2012/1

2a. Lista de Exercícios

✰ Teoremas do valor intermediário e do valor médio

1. Seja $h(x) = 2x + \cos x$.

   (a) Mostre que h é bijetora.

   (b) Calcule $h^{-1}(1)$.

   (c) Admitindo h^{-1} derivável, determine $(h^{-1})'(1)$.

2. Seja $f(x) = e^x - \frac{1}{x} - \frac{x}{2}$, $x > 0$.

   (a) Mostre que a equação
   $$e^x - \frac{1}{x} - \frac{x}{2} = y$$
   admite uma única solução para qualquer $y \in \mathbb{R}$. Conclua que f admite inversa.

   (b) Seja g a inversa de f. Mostre que $|g(x) - g(y)| \le 2|x - y|$, para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$.

3. Seja $f(x) = \operatorname{tg} x + x^3$, $-\pi/2 < x < \pi/2$.

   (a) Mostre que a equação $\operatorname{tg} x + x^3 = y$ admite uma única solução para qualquer $y \in \mathbb{R}$. Conclua que f admite inversa.

   (b) Seja g a inversa de f. Mostre que $|g(x) - g(y)| \le |x - y|$, para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$.

4. Seja $f(x) = 3x^5 + 5x^3 + 7\operatorname{sen} x$, $x \in \mathbb{R}$.

   (a) Mostre que f é inversível e sobrejetora.

   (b) Calcule f^{-1} em termos de f.

   (c) Se $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é a inversa de f, mostre que $|g(x) - g(y)| \le \frac{1}{7}|x - y|$ para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$.

5. Seja $f(x) = x^5 + x^3 + 2x + 1$, g a sua inversa e $a, b \in \mathbb{R}$ com $a < b$. Mostre que
   $$g(b) - g(a) \le \frac{1}{2}(b - a).$$

6. Seja $f(x) = x^7 + 8x^3 - x^5 - 8x$. Prove que $f'(x)$ tem duas raízes distintas no intervalo $]-1, 1[$.

7. Use o teorema do valor médio para provar as seguintes desigualdades:

   (a) $|\operatorname{sen} b - \operatorname{sen} a| \le |b - a|$, para todos $a, b \in \mathbb{R}$.

   (b) $|\sqrt{a} - \sqrt{b}| \le \frac{1}{2}|a - b|$, para todos $a, b \in \mathbb{R}$, com $a \ge 1$ e $b \ge 1$.

   (c) $\left|\ln \frac{a}{b}\right| \le |a - b|$, para todos $a, b \in \mathbb{R}$, com $a \ge 1$ e $b \ge 1$.

(d) $b^b - a^a > a^a(b-a)$, para todos $a, b \in \mathbb{R}$ com $1 \le a < b$.

(e) $e^x - e^y \ge x - y$, para todos x, y com $x \ge y \ge 0$.

8. Seja f uma função derivável no intervalo $]-1, +\infty[$. Mostre que se $f(0) = 0$ e $0 < f'(x) \le 1$, para todo $x > 0$, então $0 < f(x) \le x$, para todos $x > 0$.

9. Mostre que $f(x) = (1+x)^{1/x}$ é estritamente decrescente para $x > 0$. Conclua que

$$(1+\pi)^e < (1+e)^\pi.$$

10. Prove as seguintes desigualdades:

(a) $2\sqrt{x} > 3 - \dfrac{1}{x}$, para todo $x > 1$

(b) $e^\pi > \pi^e$

(c) $\dfrac{\operatorname{tg} b}{\operatorname{tg} a} > \dfrac{b}{a}$ para $0 < a < b < \frac{\pi}{2}$

(d) $x - \dfrac{x^3}{3!} < \operatorname{sen} x < x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!}$, para $x > 0$

(e) $\sqrt{1+x} < 1 + \frac{1}{2}x$, para $x > 0$

(f) $2x \operatorname{arctg} x > \ln(1+x^2)$, para $x > 0$

(g) $e^x > 1 + x$ para $x > 0$

(h) $e^x > 1 + x + \frac{x^2}{2}$ para $x > 0$

(i) $x^n - 1 \ge n(x-1)$ para $x \ge 1$

11. Mostre que a equação $x^3 - 3x^2 + 6 = 0$ admite uma única raiz real e tente localizá-la.

12. Mostre que a equação $x^3 + x^2 - 5x + 1 = 0$ admite três raízes reais e tente localizá-las.

13. Determine os possíveis valores de a para os quais a equação

$$x^3 + 3x^2 - 9x + a = 0$$

admite uma única raiz real.

14. Mostre que a equação $3x - 2 + \cos(\frac{\pi x}{2}) = 0$ tem exatamente uma raiz real.

15. Seja f derivável em $\mathbb{R}$ e seja g dada por $g(x) = \dfrac{f(x)}{x}$, $x \neq 0$. Suponha que x_0 é ponto de máximo local de g. Prove que

$$x_0 f'(x_0) - f(x_0) = 0.$$

Prove que a reta tangente ao gráfico de f no ponto de abscissa x_0 passa pela origem.

16. Seja $f(x)$ um polinômio de grau 3, com três raízes reais distintas. Mostre que f tem um ponto de inflexão, que é a média aritmética das três raízes.

17. Sejam $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivável e $a, b \in \mathbb{R}$ tais que $f(a) = f(b) = 0$. Mostre que se $f'(a)f'(b) > 0$, então existe c entre a e b tal que $f(c) = 0$.

18. Para que valores de k a equação $2x^3 - 9x^2 + 12x = k$ tem três raízes reais distintas ?

19. Prove que se p é um polinômio, a equação $e^x - p(x) = 0$ não pode ter infinitas soluções reais. (Sugestão: Divida por x^n para um certo n suficientemente grande.)

20. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivável e com um único ponto crítico x_0. Prove que se x_0 for ponto de mínimo (máximo) local de f, então x_0 será o único ponto de mínimo (máximo) global de f.

21. Mostre que

(a) $\operatorname{arcsen}\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right) = 2\operatorname{arctg}(\sqrt{x}) - \dfrac{\pi}{2}$ para qualquer $x \in \mathbb{R}$.

(b) $2\operatorname{arcsen} x = \operatorname{arcsen}(1-2x^2)$, $-1 < x < 1$

22. Seja $a \in \mathbb{R}$ tal que $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{ax-1}{ax+1}\right)^x = 4$. Determine a. **24.** $a = -\dfrac{1}{\ln 2}$

✰ Funções exponencial e logarítmica

23. Suponha que você receba as duas propostas abaixo para trabalhar por um mês:

A. Você recebe 1 milhão de reais no final do período.

B. Você recebe 1 centavo no primeiro dia, 2 centavos no segundo dia, 4 centavos no terceiro dia, e, em geral, 2^{n-1} centavos no n-ésimo dia.

Qual delas é mais lucrativa?

24. Calcule a derivada de cada uma das funções abaixo:

(a) $\cosh x = \dfrac{1}{2}(e^x + e^{-x})$ (b) $\sinh x = \dfrac{1}{2}(e^x - e^{-x})$ (c) $f(x) = e^{e^x}$

(d) $f(x) = x^e + e^x$ (e) $f(x) = e^{1/x^2} + \dfrac{1}{e^{x^2}}$ (f) $f(x) = \ln(e^x + 1)$

(g) $f(x) = (\ln x)^2 + (1 + 2^{x^3})^x$ (h) $f(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$ (i) $f(x) = x^\pi + \pi^x$

(j) $f(x) = 2^{x^2} + 3^{2x}$ (k) $f(x) = \ln(\operatorname{arctg} x)$ (l) $f(x) = \left(1 + \cos^2 x\right)^{\operatorname{sen} x}$

(m) $f(x) = (e^x + 3x)^{\operatorname{arcsen}(x^2)}$ (n) $f(x) = (3 + \cos x)^{\operatorname{tg}(x^2)}$ (o) $f(x) = \dfrac{\ln(x^3 + 2^{x^3})}{x^2 + e^{\cos x}}$

(p) $f(x) = (x^2+1)^{\operatorname{sen}(x^5)}$ (q) $f(x) = (1 + \operatorname{arctg} x^2)^{1/x^4}$ (r) $f(x) = x^2 e^{\operatorname{arctg} x}$

(s) $f(x) = \ln\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}$ (t) $f(x) = x^{\ln(x^2+1)}$ (u) $f(x) = (1 - \operatorname{sen} x)^{x^3-1}$

25. Calcule, caso exista

(a) $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}^-} \dfrac{\ln(1-2x)}{\operatorname{tg}(\pi x)}$ (b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x^{100}}{\sqrt[5]{x}}$ (c) $\lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{\ln x}{\operatorname{cotg} x}$

(d) $\lim\limits_{x\to1^+} (\ln x)^{(x-1)}$ (e) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{e^{2x}}$ (f) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{xe^x}{e^{x^2}}$

(g) $\lim\limits_{x\to0^+} x^\alpha \ln x$, $\alpha > 0$ (h) $\lim\limits_{x\to+\infty} x \operatorname{sen}\left(\dfrac{\alpha}{x}\right)$ (i) $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1}{1-\cos x} - \dfrac{2}{x^2}\right)$

(j) $\lim\limits_{x\to0}\left[\dfrac{1}{\ln(1+x)} - \dfrac{1}{e^x-1}\right]$ (k) $\lim\limits_{x\to0^+} (x\operatorname{sen} x)^{\operatorname{tg} x}$ (l) $\lim\limits_{x\to0} (e^x + 3x)^{1/x}$

(m) $\lim\limits_{x\to0^+} x^{\operatorname{tg}(x^2)}$ (n) $\lim\limits_{x\to0^+}\left[\dfrac{1}{x} + \ln x\right]$ (o) $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\operatorname{arctg}(2x^2)}{\ln(1+3x^2)}$

(p) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x^2)}{x\operatorname{arctg} x}$ (q) $\lim_{x\to 0}(1+\operatorname{sen} 2x)^{1/\operatorname{sen} x}$ (r) $\lim_{x\to 0} \dfrac{x \operatorname{sen} x + 2x^2}{e^x + e^{-x} - 2}$

(s) $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^+} (\operatorname{tg} x \sec x - \sec^2 x)$ (t) $\lim_{x\to +\infty} x^{\ln 2/(1+\ln x)}$ (u) $\lim_{x\to +\infty} (1+3x)^{1/\ln x}$

(v) $\lim_{x\to 0^+} (\operatorname{sen} x)^{1/\ln x}$ (w) $\lim_{x\to +\infty} \left[\ln(x+3)^{x+4} - \ln(x+2)^{x+4}\right]$ (x) $\lim_{x\to 0^-} (1-\cos x)^{1/x}$

26. No seu livro de Cálculo de 1696, l'Hospital ilustrou sua regra com o limite da função

$$f(x) = \frac{\sqrt{2a^3x - x^4} - a\sqrt[3]{a^2x}}{a - \sqrt[4]{ax^3}}$$

quando $x \to a$, $a > 0$. Calcule este limite.

✰ Funções hiperbólicas

27. Mostre que a função $\sinh x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ é inversível e sua inversa é dada por

$$\operatorname{arcsinh} x = \ln(x + \sqrt{1+x^2}), \ x \in \mathbb{R}.$$

Encontre as inversas das demais funções hiperbólicas e também suas derivadas.

28. Mostre que $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$, $\operatorname{sech}^2 x = 1 - \tanh^2 x$ e $\coth^2 x = 1 + \operatorname{csch}^2 x$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

29. Mostre que $\cosh(x+y) = \sinh x \sinh y + \cosh x \cosh y$ e $\sinh(x+y) = \cosh x \sinh y + \cosh y \sinh x$, $x, y \in \mathbb{R}$.

30. Esboce os gráficos de todas as funções hiperbólicas e de suas inversas.

✰ Máximos e mínimos

31. Encontre $a \in \mathbb{R}$ para que $f(x) = x^2 + \dfrac{a}{x}$ tenha:

   (a) um mínimo local em $x = 2$.

   (b) um mínimo local em $x = -3$.

   (c) Mostre que f não terá máximo local para nenhum valor de a.

32. (a) Esboce o gráfico de $f(x) = x^2 e^{-x}$.

   (b) Determine, em função de k, o número de soluções reais da equação $ke^x = x^2$.

33. (a) Ache o ponto de mínimo de $f(x) = \dfrac{e^x}{x}$ no intervalo $]0, +\infty[$.

   (b) Prove que $\dfrac{e^{a+b}}{ab} \geq e^2$, para todos $a > 0$ e $b > 0$.

34. Seja f uma função. Se existir uma reta $y = mx + n$ tal que $\lim_{x\to+\infty} [f(x) - (mx+n)] = 0$, dizemos que $y = mx + n$ é uma **assíntota** para f. Prove que a reta $y = mx + n$ é uma assíntota para f se, e somente se, $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = m$ e $\lim_{x\to+\infty} (f(x) - mx) = n$. (Tudo o que dissemos para $x \to +\infty$ vale também para $x \to -\infty$.)

35. Esboce o gráfico das funções abaixo e dê as equações das assíntotas, quando existirem.

(a) $f(x) = x^4 + 2x^3 + 1$ (b) $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2 - 1}$ (c) $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + 1}$

(d) $f(x) = \dfrac{x^3 - 1}{x^3 + 1}$ (e) $f(x) = \dfrac{x - 1}{x^2 - 4}$ (f) $f(x) = (3 - \dfrac{6}{x})e^{\frac{2}{x}}$

(g) $f(x) = \sqrt[3]{x^3 - x^2}$ (h) $f(x) = e^x - e^{3x}$ (i) $f(x) = x - 3\ln x - \dfrac{2}{x}$

(j) $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$ (k) $f(x) = \sqrt[3]{x(x-1)^2}$ (l) $f(x) = x^x$

(m) $f(x) = \ln(2x) - \ln(3x^2 + 3)$ (n) $f(x) = \dfrac{2x^2}{x^2 - 1}$ (o) $f(x) = \dfrac{(x-2)^3}{x^2}$

(p) $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x - 3}{x + 2}$ (q) $f(x) = \operatorname{arctg}(\ln x)$ (r) $f(x) = \dfrac{x^3 - x + 1}{x^2}$

(s) $f(x) = x^2 \ln x$ (t) $f(x) = \dfrac{e^x}{x}$ (u) $f(x) = \dfrac{\ln x}{x^2}$

(v) $f(x) = x^3 + x^2 + x$ (w) $f(x) = \dfrac{x + 1}{x^2 + x + 1}$ (x) $f(x) = \sqrt[3]{x^2 - x}$

36. Achar os valores mínimo e máximo de:

(a) $f(x) = \operatorname{sen} x - \cos x,\ x \in [0, \pi]$

(b) $f(x) = \sqrt{3 + 2x - x^3}$, $-\frac{1}{2} \le x \le 1$

(c) $f(x) = \dfrac{1}{x} + \ln x$, $\frac{1}{2} \le x \le 4$

(d) $f(x) = \sqrt[3]{x^3 - 2x^2}$, $-1 \le x \le 2$

(e) $f(x) = |x^4 - 2x^3|$, $0 \le x \le 3$

(f) $f(x) = \frac{x^4}{4} - x^3 - 2x^2 + 3$, $-2 \le x \le 3$

(g) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$, $-2 \le x \le 1$

(h) $f(x) = \dfrac{x^5}{5} - \dfrac{x^4}{2} - x^3 + 4x^2 - 4x + 1$, $-3 \le x \le 3$

37. Para que números positivos a a curva $y = a^x$ corta a reta $y = x$?

38. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função derivável e seja $a \in \mathbb{R}$ fixado. Verifique se as afirmações são verdadeiras ou falsas, justificando sua resposta:

(a) Se $f'(x) > 0$, para todo $x > a$, então
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty.$$

(b) Se f é derivável até segunda ordem com $f'(x) > 0$ e $f''(x) > 0$, para todo $x > a$, então
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty.$$

(c) Se $\lim_{x \to +\infty} f'(x) = 0$ então $\lim_{x \to +\infty} f(x) = L \in \mathbb{R}$.

(d) Se existe uma assíntota para f (quando $x \to +\infty$) com coeficiente angular m e se existe
$$\lim_{x \to +\infty} f'(x) = L,$$
então $L = m$.

(e) Se $\lim_{x\to+\infty} f'(x) = m \in \mathbb{R},\ m \neq 0$ então f tem uma assíntota com coeficiente angular igual a m.

✰ Aplicações

39. Para que pontos da circunferência $x^2 + y^2 = 25$ a soma das distâncias a (2,0) e (-2,0) é mínima?

40. Achar os pontos da hipérbole $x^2 - y^2 = 1$ mais próximos de (0,1).

41. Um triângulo isóceles está circunscrito a um círculo de raio R. Se x é a altura do triângulo, mostre que sua área é mínima quando $x = 3R$.

42. Qual é o menor valor da constante a para o qual a desigualdade $ax + \frac{1}{x} \geq 2\sqrt{2}$ é válida para todo número positivo x?

43. Seja $f(x) = 5x^2 + \dfrac{a}{x^5},\ x > 0$, onde $a > 0$. Ache o menor valor de a de modo que $f(x) \geq 28,\ \forall x > 0$.

44. Um cilindro é obtido girando-se um retângulo ao redor do eixo x, onde a base do retângulo está apoiada. Seus vértices superiores estão sobre a curva $y = \dfrac{x}{x^2+1}$. Qual é o maior volume que tal cilindro pode ter?

45. (a) Latas cilíndricas fechadas devem ser feitas com um volume V especificado. Qual é a razão entre a altura e o diâmetro da base que minimiza a quantidade de metal gasto para fazer a lata?

    (b) Por que as latas encontradas no supermercado não são em geral como em (a)? Em geral o metal vem em uma chapa retangular. Não há desperdício envolvido em cortar a chapa que formará a superfície lateral, mas as tampas devem ser cortadas de uma peça quadrada, e as sobras, são desprezadas (ou então recicladas). Ache a razão entre a altura e o diâmetro de uma lata de volume V que minimiza o custo do material utilizado.

46. Um arame de comprimento L deve ser cortado em 2 pedaços, um para formar um quadrado e outro um triângulo equilátero. Como se deve cortar o arame para que a soma das áreas cercadas pelos 2 pedaços seja (a) máxima? (b) mínima? Mostre que no caso (b) o lado do quadrado é 2/3 da altura do triângulo.

47. Um canhão situado no solo é posto sob um ângulo de inclinação θ. Seja r o alcance do canhão, isto é, a distância entre o canhão e o ponto de impacto da bala. Então r é dado por $r = \frac{2v^2 \operatorname{sen}\theta \cos\theta}{g}$, onde v e g são constantes. Para que ângulo o alcance é máximo?

48. Determine o cone circular reto de maior volume que pode ser inscrito numa esfera de raio 3.

49. Deseja-se construir uma esfera e um cubo de modo que a soma das áreas de suas superfícies seja igual a 2. Determine o raio da esfera que maximiza e o que minimiza a soma de seus volumes.

50. Um muro de 2 metros de altura está a 1 metro de distância da parede lateral de um prédio. Qual o comprimento da menor escada cujas extremidades se apóiam uma na parede, e outra no chão do lado de fora do muro?

51. Um papel de filtro circular de raio a deve ser transformado em um filtro cônico cortando um setor circular e juntando as arestas CA e CB. Ache a razão entre o raio e a profundidade do filtro de capacidade máxima.

52. (LEI DE REFRAÇÃO DE SNELLIUS) O objetivo desta questão é demonstrar como a *lei da refração de Snellius*, da Óptica Geométrica, pode ser obtida como conseqüência do *princípio de Fermat*, segundo o qual "a trajetória dos raios de luz é aquela que minimiza o tempo de percurso".

    Sejam $P \in \mathbb{R}^2$ um ponto no semi-plano superior e $Q \in \mathbb{R}^2$ um ponto no semi-plano inferior, ambos fixados. Uma partícula vai de P a um ponto $M = (x, 0)$ sobre o eixo Ox com velocidade constante u e movimento retilíneo; em seguida, vai de M até Q com velocidade constante v, também em movimento retilíneo. Seja $T\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que, para todo $x \in \mathbb{R}$, $T(x)$ é o tempo de percurso de P a Q. Mostre que T possui um único ponto de mínimo $x_0 \in \mathbb{R}$. Verifique que $x_0 \in (0, b)$ e que, se $x = x_0$, então $\dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{u} = \dfrac{\operatorname{sen}\beta}{v}$.

53. Deve-se construir uma estrada ligando uma fábrica A a uma ferrovia que passa por uma cidade B. Assumindo-se que a estrada e a ferrovia sejam ambas retilíneas, e que os custos de frete por unidade de distância sejam m vezes maiores na estrada do que na ferrovia, encontre o ângulo α a que a estrada deve ser conectada à ferrovia de modo a minimizar o custo total do frete da fábrica até a cidade. Assuma $m > 1$.

54. Um corredor de largura a forma um ângulo reto com um segundo corredor de largura b. Uma barra longa, fina e pesada deve ser empurrada do piso do primeiro corredor para o segundo. Qual o comprimento da maior barra que pode passar pela esquina?

Respostas

(1) (b) 0; (c) $\dfrac{1}{2}$; **(13)** $a > 5$ ou $a < -27$; **(18)** $4 < k < 5$; **(23)** B;

(25) (a) 0; (b) 0; (c) 0; (d) 1; (e) 0; (f) 0; (g) 0; (h) α; (i) $\frac{1}{6}$; (j) 1; (k) 1; (l) e^4; (m) 1; (n) $+\infty$; (o) $\frac{2}{3}$; (p) 1; (q) e^2; (r) 3; (s) $-\dfrac{1}{2}$; (t) 2; (u) e; (v) e; (w) 1; (x) $+\infty$; **(26)** $\dfrac{16a}{9}$; **(31)** (a) $a = 16$; (b) $a = -54$;

(32) Não há soluções se $k < 0$; tem 1 solução se $k = 0$ ou $k > \dfrac{4}{e^2}$; tem 2 soluções se $k = \dfrac{4}{e^2}$; tem 3 soluções se $0 < k < \dfrac{4}{e^2}$.

(33) (a) $x_0 = 1$; **(36)** (a) -1, $\sqrt{2}$; (b) $\sqrt{\frac{17}{8}}$, $\sqrt{3 + \sqrt{\frac{32}{27}}}$; (c) 4, 1; (d) $-\sqrt[3]{3}$, 0; (e) 0, 27; (f) $-87/4$, 7; (g) -27, 0; (h) $f(-3)$, $f(-2)$; **(37)** $a \le e^{\frac{1}{e}}$;

(38) (b) e (d) são verdadeiras e (a), (c), (e) são falsas; **(39)** $(5,0)$ e $(-5,0)$; **(40)** $\left(\pm\dfrac{\sqrt{5}}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$; **(42)** $a = 2$; **(43)** $a = 2^8$; **(44)** $\pi/4$; **(45)** (a) 1; (b) $4/\pi$; **(46)** (a) Deve-se formar apenas um quadrado; (b) o lado do quadrado é $\frac{\sqrt{3}L}{9+4\sqrt{3}}$;

(47) $\pi/4$; **(48)** $h = 4$, $r = 2\sqrt{2}$; **(49)** $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$; $\frac{1}{\sqrt{2\pi+12}}$; **(50)** $\left(1 + \sqrt[3]{4}\right)^{3/2}$; **(51)** $\sqrt{2}$; **(53)** $\pi - \max\{\beta, \operatorname{arcsen}(\frac{1}{m})\}$; **(54)** $(a^{2/3} + b^{2/3})^{3/2}$.