UFPR - Universidade Federal do Paraná
Departamento de Matemática
Prof. José Carlos Eidam
CM041 - Cálculo I - Turma C - 2012/1

4a. Lista de Exercícios

✰ Integrais impróprias

1. Decida quais integrais impróprias abaixo são convergentes e tente calcular seu valor. Dentre as convergentes, tente determinar aquelas que são absolutamente convergentes.

(1) $\int_1^\infty \frac{dx}{x^\alpha},\ \alpha > 0$ (2) $\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha},\ \alpha > 0$ (3) $\int_1^\infty \ln x\, dx$

(4) $\int_0^1 \ln x\, dx$ (5) $\int_1^\infty \frac{\operatorname{sen} x}{x^\alpha} dx,\ \alpha > 0$ (6) $\int_1^\infty \frac{\cos x}{x^\alpha} dx,\ \alpha > 0$

(7) $\int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{sen}(x^2)\, dx$ (8) $\int_{-\infty}^{+\infty} \cos(x^2)\, dx$ (9) $\int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{sen}(x^\alpha)\, dx,\ \alpha > 0$

(10) $\int_0^\infty x^\alpha e^{-\beta x} dx,\ \alpha, \beta > 0$ (11) $\int_0^\infty e^{-x} \operatorname{sen} x\, dx$ (12) $\int_0^\infty e^{-x} \ln x\, dx$

(13) $\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{1+x^2}$ (14) $\int_0^\infty \frac{x^5+3x^2-7}{x^6+3x^2+3} dx$ (15) $\int_1^\infty \frac{x\sqrt{x}+\operatorname{sen} x}{x^3+5\ln x} dx$

(16) $\int_0^\infty e^{-\alpha x} dx,\ \alpha > 0$ (17) $\int_0^1 \frac{\ln x}{x^\alpha} dx,\ \alpha > 0$ (18) $\int_0^\infty \frac{x^\alpha}{1+x^\beta} dx,\ \alpha, \beta > 0$

(19) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x+x^2}}$ (20) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x-x^2}}$ (21) $\int_2^\infty \frac{dx}{x(\ln x)^\alpha},\ \alpha > 0$

(22) $\int_0^\infty x^\alpha e^{-x^\beta} dx,\ \alpha, \beta > 0$ (23) $\int_0^\infty e^{-x} \operatorname{sen}(1/x)\, dx$ (24) $\int_1^\infty \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x^2} dx$

(25) $\int_1^\infty \frac{\operatorname{sen}(x^\alpha)}{x^\beta},\ \alpha, \beta > 0$ (26) $\int_0^\infty \frac{\sqrt{x^2+2012}}{\sqrt[3]{x^7+3x^3+2}} dx$ (27) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

(28) $\int_2^\infty \frac{dx}{x^\alpha \ln x},\ \alpha > 0$ (29) $\int_0^{+\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{e^x - 1} dx,\ \alpha > 0$ (30) $\int_0^\infty \frac{xe^{-x}}{\sqrt{x^5+7x^4+11}} dx$

(31) $\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx$ (32) $\int_0^\infty \frac{x \operatorname{sen} x}{1+x^3} dx$ (33) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(x^2-1)e^{-x^2}}{x^4+x^2+7} dx$

2. Calcule a derivada das seguintes funções:

(1) $f(x) = \int_x^{x^2} t \operatorname{sen}(2t-1)\, dt$ (2) $f(x) = \int_{x^2}^{x^3} t^{1/2} e^t\, dt$ (3) $f(x) = \int_{3-2x^2}^{\ln x} \cos(t^2)\, dt$

(4) $f(x) = \int_0^{5 \operatorname{sen} x} \frac{e^{3t^2}}{t^2+1} dt$ (5) $f(x) = \int_0^x (x-t) e^{-t^2} dt$ (6) $f(x) = \int_x^{x^2+7} (x+t) \operatorname{sen} t\, dt$

(7) $f(x) = \int_{-\infty}^{\operatorname{sen} x} e^{-t^2} dt$ (8) $f(x) = \int_{-\infty}^{e^x} \frac{3-2t^4}{1+t^8} dt$ (9) $f(x) = \int_{x^2}^\infty e^{-t} \ln t\, dt$

(10) $f(x) = \int_{\cos x}^{\operatorname{sen} x} e^{t^2} dt$ (11) $f(x) = \int_{\sqrt{x}}^{2\sqrt{x}} \operatorname{sen}(t^2)\, dt$ (12) $g(x) = \int_{\operatorname{sen} x}^{x^3} \frac{dt}{1+t^4}$

3. Esboce o gráfico das funções abaixo:

   (1) $f(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt$ (2) $f(x) = \int_0^x \frac{\text{sen}\, t}{t} dt$ (3) $f(x) = \int_0^x \frac{dt}{te^t}$

4. Seja f uma função contínua em um intervalo I contendo a origem e seja

$$y = y(x) = \int_0^x \text{sen}(x-t) f(t)\, dt$$

   Prove que $y'' + y = f(x)$ e $y(0) = y'(0) = 0$, para todo $x \in I$.

5. Calcule $\lim_{x\to 0} \frac{\int_0^{x^2} \cos(t^2)\, dt}{\int_0^x e^{-t^2}\, dt}$.

6. Mostre que $f(x) = \int_0^{1/x} \frac{1}{t^2+1} dt + \int_0^x \frac{1}{t^2+1} dt$ é constante em $(0, \infty)$. Qual o valor dessa constante?

7. Seja $f(x) = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1+t^4}} dt$, $x \in \mathbb{R}$.

   (a) Mostre que f é crescente e ímpar.

   (b) Mostre que $f(x) \le f(1) + 1 - \frac{1}{x}$, $\forall x \ge 1$. (Sugestão: Integre $0 \le \frac{1}{\sqrt{1+t^4}} \le \frac{1}{t^2}$ de 1 a x.)

   (c) Mostre que $\lim_{x\to\infty} f(x)$ existe e é um número real positivo.

   (d) Esboce o gráfico de $f(x)$, localizando seu ponto de inflexão.

8. Seja $f(x) = \int_0^x e^{\frac{x^2-t^2}{2}} dt$. Mostre que $f'(x) - xf(x) = 1$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

9. Seja $F : [1, +\infty[\to \mathbb{R}$ dada por $F(x) = \int_1^x \sqrt{t^3 - 1}\, dt$.

   (a) Calcule o comprimento do gráfico de F entre $x = 1$ e $x = 4$.

   (b) Calcule $\lim_{x\to 2} \frac{F(x^3) - F(8)}{\text{sen}(x-2)}$

10. (Função Gamma) A função Gamma é definida por

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1}\, dt,$$

    para $x > 0$.

    (a) Mostre que Γ é bem-definida, i.e., que a integral acima é convergente para todo $x > 0$.

    (b) Use integração por partes para mostrar que $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$, para todo $x > 0$.

    (c) Use indução em n para mostrar que $\Gamma(n) = (n-1)!$ para todo inteiro $n > 0$. Isso mostra que a função Γ é uma extensão da função fatorial para todos os reais positivos.

    (d) Use o ítem (2) para definir Γ em toda a reta, exceto nos inteiros não-positivos.

11. (Transformada de Laplace) Dada $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, a *transformada de Laplace de f* é definida como

$$\mathscr{L} f(x) = \int_0^\infty e^{-tx} f(t)\, dt,$$

    para $x > 0$. A transformada de Laplace é uma ferramenta muito útil para resolver certas equações diferenciais.

(a) Dizemos que f é de *crescimento exponencial* se existem $\alpha, a, M > 0$ tais que $|f(t)| \leq Me^{\alpha t}$ para todo $t > a$. Mostre que se f é de crescimento exponencial então $\mathscr{L}f$ é bem-definida (i.e., a integral converge) para todo $x > 0$.

(b) Mostre que se f é de crescimento exponencial e diferenciável então $\mathscr{L}(f')(x) = x\mathscr{L}f(x) - f(0)$. Encontre uma fórmula semelhante para $\mathscr{L}(f'')$

(c) Seja H_α a função que vale 1 se $t \geq \alpha$ e zero se $0 < t < \alpha$. Calcule $\mathscr{L}H_\alpha(x)$

(d) Verifique as seguintes igualdades:

(1) $\mathscr{L}(1) = 1/x$ (2) $\mathscr{L}(e^\alpha t) = (x-\alpha)^{-1}$, $x > \alpha$ (3) $\mathscr{L}(t^n) = n! x^{-n-1}$, $n \in \mathbb{N}$

(4) $\mathscr{L}(t^\alpha) = \Gamma(\alpha+1)x^{-\alpha-1}$ (5) $\mathscr{L}(\operatorname{sen}(\alpha t)) = \frac{\alpha}{x^2+\alpha^2}$ (6) $\mathscr{L}(\sinh(\alpha t)) = \frac{\alpha}{x^2-\alpha^2}$, $x > |\alpha|$

(7) $\mathscr{L}(\cos(\alpha t)) = \frac{x}{x^2+\alpha^2}$ (8) $\mathscr{L}(\cosh(\alpha t)) = \frac{x}{x^2-\alpha^2}$, $x > |\alpha|$ (9) $\mathscr{L}(t^n e^\alpha t) = n!(x-\alpha)^{-n-1}$, $n \in \mathbb{N}$

12. (Função Erro) A função *Erro* é definida por

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt, \ x \in \mathbb{R}.$$

(a) Mostre que a função erf é bem-definida, i.e., a integral acima converge.

(b) Esboce o gráfico da função erro.

(c) Pode-se provar que $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}$. Use este fato e a mudança de variável $t^2 = u$ para mostrar que $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$.

13. (Função seno integral) A função *Seno integral* é definida como

$$\operatorname{Si}(x) = \int_0^x \frac{\operatorname{sen} t}{t} dt$$

(a) Mostre que a função Si é bem-definida, i.e., a integral acima converge.

(b) Esboce o gráfico de Si. (Pode-se provar que $\lim_{x\to\infty} \operatorname{Si}(x) = \pi/2$; você pode usar este fato.)

☆ Polinômio de Taylor

14. Calcule o polinômio de Taylor de f de grau n no ponto x_0 indicado:

(1) $f(x) = e^x$, $x_0 = 0$ (2) $f(x) = e^x$, $x_0 = 1$ (3) $f(x) = \operatorname{sen} x$, $x_0 = 0$

(4) $f(x) = \cos x$, $x_0 = 0$ (5) $f(x) = \cos x$, $x_0 = -1$ (6) $f(x) = \operatorname{arctg} x$, $x_0 = 0$

(7) $f(x) = \ln(1+x)$, $x_0 = 0$ (8) $f(x) = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$, $x_0 = 0$ (9) $f(x) = x^3 + 2x^2 - 5x + 3$, $x_0 = 1$

(10) $f(x) = \sinh x$, $x_0 = 0$ (11) $f(x) = \cosh x$, $x_0 = 0$ (12) $f(x) = \frac{1}{1-x}$, $x_0 = 0$

(13) $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$, $x_0 = 0$ (14) $f(x) = x\ln(1+x)$, $x_0 = 0$ (15) $f(x) = \cos^2 x$, $x_0 = 0$

15. Use o polinômio de Taylor de ordem 2 e a fórmula de Taylor com resto de Lagrange para calcular um valor aproximado para cada um dos números abaixo, estimando o erro:

(a) $\ln(1{,}01)$ (b) $\operatorname{sen}(-0{,}01)$ (c) $\operatorname{tg}(-0{,}1)$ (d) $\sqrt[4]{16{,}1}$ (e) $\sqrt{8{,}97}$

(f) $\cos(\frac{\pi}{2} + 0{,}05)$ (g) $e^{0{,}07}$ (h) $\operatorname{arctg}(0{,}09)$ (i) $\ln(1{,}001)$ (j) $\cosh(-0{,}1)$

16. Use a fómula de Taylor com resto de Lagrange para mostrar as igualdades abaixo:

(a) $e^x = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} \frac{x^n}{n!}$, $x \in \mathbb{R}$ (b) $\operatorname{sen} x = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$, $x \in \mathbb{R}$

(c) $\cos x = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$, $x \in \mathbb{R}$ (d) $\ln(1+x) = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n$, $|x| < 1$

(e) $\operatorname{arctg} x = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$, $|x| \le 1$ (f) $\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \lim_{N\to\infty} 2\sum_{n=0}^{N} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$, $|x| < 1$

17. Utilizando o exercício anterior, obtenha um valor aproximado de:

(a) e, com erro inferior a 10^{-5} (b) $\operatorname{sen} 1$, com erro inferior a 10^{-7}

(c) $\cos 1$, com erro inferior a 10^{-5} (d) $\ln 2$ e $\ln 3$, com erro inferior a 10^{-5}

(e) e^2, com erro inferior a 10^{-5} (f) $\operatorname{arctg}(1/2)$ e $\operatorname{arctg}(1/3)$, com erro inferior a 10^{-5}

(g) $\pi/4$, com[1] erro inferior a 10^{-5} (h) $\cos(1/2)$, com erro inferior a 10^{-5}

18. Calcule $\frac{d^{320}\operatorname{arctg}}{dx^{320}}(0)$ e $\frac{d^{321}\operatorname{arctg}}{dx^{321}}(0)$

19. Estime as integrais abaixo:

(a) $\displaystyle\int_0^1 \operatorname{sen}(t^2)\,dt$, com erro inferior a 10^{-5} (b) $\displaystyle\int_0^1 e^{t^3}\,dt$, com erro inferior a 10^{-7}

(c) $\displaystyle\int_0^1 \ln(1+t^4)\,dt$, com erro inferior a 10^{-2} (d) $\displaystyle\int_0^1 e^{-t^2}\,dt$, com erro inferior a 10^{-7}

(e) $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{\operatorname{sen} t}{t}\,dt$, com erro inferior a 10^{-6} (d) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1-\cos(t^2)}{t}\,dt$, com erro inferior a 10^{-7}

20. Utilizando os polinômios de Taylor das funções envolvidas, calcule os seguintes limites:

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x}$ (b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2}$ (c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x-\operatorname{sen} x}{x^3}$ (d) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x}$ (e) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)-\ln(1-x)}{x}$

(f) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x}$ (g) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^3}-1}{x^2}$ (h) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x}$ (i) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x - \left(x - \frac{x^3}{3!}\right)}{x^5}$ (j) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^x - \left(1 + x + \frac{x^2}{2}\right)}{x^3}$

✫ Respostas

(1)

	CA*	C**	Valor	D**
1	$\alpha > 1$		$(\alpha-1)^{-1}$	$\alpha \le 1$
2	$\alpha < 1$		$(1-\alpha)^{-1}$	$\alpha \ge 1$
3				x
4	x		-1	
5	$\alpha > 1$	$\alpha > 0$		
6	$\alpha > 1$	$\alpha > 0$		
7		x		
8		x		
9		x		
10	x			
11	x		1/2	
12	x			

	CA*	C**	Valor	D**
13	x		$\pi/2$	
14				x
15				x
16	x		α^{-1}	
17	$\alpha < 1$		$\alpha \geq 1$	
18	$\beta > \alpha + 1$			$\beta \leq \alpha + 1$
19	x			
20	x			
21	$\alpha > 1$			$0 \leq \alpha \leq 1$
22	x			
23	x			
24	x			
25	$\beta > 1$	$\beta \leq 1$		
26	x			
27	x		$\pi/2$	
28	$\alpha > 1$			$\alpha \leq 1$
29	x			
30	x			
31	x		1	
32	x			
33	x			

(Legenda: CA - Converge absolutamente; C-Converge; D-diverge)

(14)

(1) $p_n(x) = 1 + x + x^2/2! + \ldots + x^n/n!$;
(2) $p_n(x) = e + e(x-1) + e(x-1)^2/2! + \ldots + e(x-1)^n/n!$;
(3) $p_{2k+1}(x) = x - x^3/3! + (-1)^k x^{2k+1}/(2k+1)!$;
(4) $p_{2k}(x) = 1 - x^2/2! + (-1)^k x^{2k}/(2k)!$;
(5) $p_n(x) = \cos 1 - \operatorname{sen} 1(x-1) + \cos 1(x-1)^2/2! - \operatorname{sen} 1(x-1)^3/3! + \ldots + f^{(n)}(1)(x-1)^n/n!$;
(6) $p_{2k+1}(x) = x - x^3/3 + x^5/5 + \ldots + (-1)^k x^{2k+1}/(2k+1)$;
(7) $p_n(x) = x - x^2/2 + x^3/3 - \ldots + (-1)^n x^n/n$;
(8) $p_{2k+1}(x) = 2x + 2x^3/3 + \ldots + 2x^{2k+1}/(2k+1)$;
(9) $p_n(x) = p_3(x) = 1 + 2(x-1) + 5(x-1)^2 + (x-1)^3$ para todo $n \geq 3$;
(10) $p_{2k+1}(x) = x + x^3/3! + \ldots + x^{2k+1}/(2k+1)!$;
(11) $p_{2k}(x) = 1 + x^2/2! + \ldots + x^{2k}/(2k)!$;
(12) $p_n(x) = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n$;
(13) $p_{2k}(x) = 1 - x^2 + x^4 + \ldots + (-1)^k x^{2k}$;
(14) $p_{n+1}(x) = x^2 - x^3/2 + x^4/3 - \ldots + (-1)^n x^{n+1}/n$;
(15) $p_{2k}(x) = 1 + x + \ldots + 2^{2k-1} x^{2k}/(2k)!$