Exercícios de Cálculo I - CM041

Prof. José Carlos Corrêa Eidam
DMAT/UFPR

Disponível no sítio `people.ufpr.br/ ~eidam/index.htm`

1o. semestre de 2012

Parte 2

✰ Limites de funções

1. Calcule os seguintes limites, caso existam:

1) $\lim_{x\to -2} \dfrac{2x^3+9x^2+12x+4}{-x^3-2x^2+4x+8}$ 2) $\lim_{x\to -3} \dfrac{\sqrt{x^2+16}-5}{x^2+3x}$ 3) $\lim_{x\to 2} \dfrac{\sqrt{x^2+12}-4}{2-\sqrt{x^3-4}}$

4) $\lim_{x\to 1/2} \dfrac{\sqrt[4]{2x}-1}{\sqrt{2x-1}}$ 5) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[5]{x^4+1}-1}{x^4}$ 6) $\lim_{x\to 1} \dfrac{\sqrt[7]{x}-1}{\sqrt[3]{x}-1}$

7) $\lim_{x\to 1^+} \dfrac{\sqrt{x^2-1}+\sqrt{x}-1}{\sqrt{x-1}}$ 8) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}(20x)}{\operatorname{sen}(301x)}$ 9) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}(\operatorname{sen}(2x))}{x}$

10) $\lim_{x\to 0}(\operatorname{tg}(3x)\operatorname{cossec}(6x))$ 11) $\lim_{x\to 0} \dfrac{1-\sqrt[3]{\cos x}}{x^2}$ 12) $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\cos x}{x-\frac{\pi}{2}}$

13) $\lim_{x\to 3^-} \dfrac{\sqrt{x^2-6x+9}}{x-3}$ 14) $\lim_{x\to 1} \dfrac{\operatorname{sen}(3x^2-5x+2)}{x^2+x-2}$ 15) $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x^3-x^2}$

16) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}^3(x)\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)}{x^2}$ 17) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x^4+x^2}}{x}$ 18) $\lim_{x\to 1} \left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{3}{1-x^3}\right)$

19) $\lim_{x\to 1^+} \dfrac{\operatorname{sen}(x^3-1)\cos\left(\frac{1}{1-x}\right)}{\sqrt{x-1}}$ 20) $\lim_{x\to 2^-} \dfrac{x^2-2x}{x^2-4x+4}$ 21) $\lim_{x\to +\infty} \dfrac{x}{\sqrt{x+1}}$

22) $\lim_{x\to +\infty} \dfrac{2x^3-x^2+7x-3}{2-x+5x^2-4x^3}$ 23) $\lim_{x\to +\infty} (\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x})$ 24) $\lim_{x\to +\infty} \dfrac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{9x+1}}$

25) $\lim_{x\to +\infty} \dfrac{x-\operatorname{sen} x}{x+\operatorname{sen} x}$ 26) $\lim_{x\to +\infty} \left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^4+1}\right)$ 27) $\lim_{x\to +\infty} \dfrac{\sqrt{7x^6+5x^4+7}}{x^4+2}$

28) $\lim_{x\to -\infty} \dfrac{3x^5+2x-8}{\sqrt{x^6+x+1}}$ 29) $\lim_{x\to -\infty}(\sqrt{x^2+9}+x+3)$ 30) $\lim_{x\to 2} \dfrac{(x^2-2x)\operatorname{sen}(x^2-4)}{\sqrt{x^2+4}-\sqrt{4x}}$

31) $\lim_{x\to +\infty} \dfrac{3x^3+x\cos(\sqrt{x})}{x^4\operatorname{sen}(1/x)+1}$ 32) $\lim_{x\to +\infty} \dfrac{\sqrt{x}(\operatorname{sen} x+\sqrt{x}\cos x)}{x\sqrt{x}-\operatorname{sen}(x\sqrt{x})}$ 33) $\lim_{x\to -\infty} \dfrac{\sqrt[4]{7x^{12}+5x^4+7}}{2x^3+2}$

34) $\lim_{x\to +\infty}(\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x})$ 35) $\lim_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x^3+x^2-5x+3}}{x^2-1}$ 36) $\lim_{x\to +\infty} \dfrac{\sqrt{x}\cos x+2x^2\operatorname{sen}(\frac{1}{x})}{x-\sqrt{1+x^2}}$

2. Seja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ uma função tal que $|f(x)|\le 2|x|$, para todo $x\in\mathbb{R}$. Calcule $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x^3)}{x}$.

3. Seja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tal que $1+x^2+\dfrac{x^6}{3}\le f(x)+1\le \sec x^2+\dfrac{x^6}{3}$, para todo $x\in\mathbb{R}$. Calcule $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ e
$$\lim_{x\to 0}\left(f(x)\cos\left(\frac{1}{x+x^2}\right)\right).$$

4. Sejam $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tais que $|\operatorname{sen} x|\le f(x)\le 3|x|$ e $0\le g(x)\le 1+|\operatorname{sen} x|$, para todo $x\in\mathbb{R}$. Calcule $\lim\limits_{x\to 0}(f(x)\,g(x)+\cos x)$.

5. Sejam $c,L\in\mathbb{R}$ tais que $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{2x^3+cx+c}{x^2-1}=L$. Determine c e L.

6. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

   (a) Assumindo que $\lim_{x\to 2} \dfrac{f(x)}{x^2} = 1$, calcule $\lim_{x\to 2} \dfrac{f(x)}{x}$.

   (b) Assumindo que $\lim_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{x} = 0$, calcule $\lim_{x\to 0} f(x)$.

   (c) Assumindo que $\lim_{x\to +\infty} \dfrac{f(x)}{x^2+x} = +\infty$, calcule $\lim_{x\to +\infty} f(x)$.

7. A resolução abaixo está incorreta. Assinale o erro e calcule (corretamente) o limite:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-x\right) &= \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x}\right)}-x\right)\\ &= \lim_{x\to+\infty} x\underbrace{\left(\sqrt{1+\underbrace{\frac{1}{x}}_{\to 0}}-1\right)}_{\to 0} = \lim_{x\to+\infty}(x\cdot 0) = 0.\end{aligned}$$

8. Decida se a afirmação é verdadeira ou falsa, justificando ou apresentando um contra-exemplo.

   (a) Se $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ são funções tais que f é limitada positiva e $\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$, então tem-se que
$$\lim_{x\to+\infty} f(x)g(x) = +\infty.$$

   (b) Se $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ são funções tais que f é limitada e $\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$, então tem-se que
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) + g(x) = +\infty.$$

   (c) Se $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ são funções tais que $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = +\infty$, então $\lim_{x\to+\infty} f(x) - g(x) = +\infty$.

9. Dê exemplos de funções f e g tais que:

   (a) $\lim_{x\to 0} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to 0} g(x) = +\infty$ e $\lim_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$.

   (b) $\lim_{x\to 0} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to 0} g(x) = +\infty$ e $\lim_{x\to 0} \big(f(x) - g(x)\big) = 1$.

   (c) $\lim_{x\to 0} \big(f(x) - g(x)\big) = 0$ e $\lim_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{g(x)} \neq 1$.

   (d) $\lim_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$ e $\lim_{x\to 0} \big(f(x) - g(x)\big) \neq 0$.

10. Mostre que se $\lim_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$ e se g é limitada então $\lim_{x\to a} f(x) - g(x) = 0$.

✰ Continuidade de Funções

11. Determine o conjunto dos pontos de seu domínio em que a função f é contínua. Justifique.

(a) $f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen}(x^2-4)+5, & \text{se } x > 2 \\ \dfrac{x^2+x-6}{x-2}, & \text{se } x < 2 \\ 5, & \text{se } x = 2 \end{cases}$ (b) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{|x^2-4x+3|}{x-3}, & \text{se } x \neq 3 \\ 1, & \text{se } x = 3 \end{cases}$

(c) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2+x-2}{(x-1)^2}, & \text{se } x \neq 1 \\ 0, & \text{se } x = 1 \end{cases}$ (d) $f(x) = \dfrac{1+(-1)^{[x]}}{2}\operatorname{sen}(\pi x)$.

Obs.: o símbolo $[x]$ denota o maior inteiro que é menor ou igual a x e é definido por $[x] = \max\{n \in \mathbb{Z} : n \leq x\}$.

12. Determine L para que a função dada seja contínua em $\mathbb{R}$.

(a) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen}(x^2+2) - \operatorname{sen}(x+2)}{x}, & \text{se } x \neq 0 \\ L, & \text{se } x = 0 \end{cases}$ (b) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x^8+x^4}}{x^2}, & \text{se } x \neq 0 \\ L, & \text{se } x = 0 \end{cases}$

13. Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{(x-1)^6}}{x-1}, & \text{se } x \neq 1 \\ 1, & \text{se } x = 1 \end{cases}$$

Verifique que $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} f(x)$. Pergunta-se: f é contínua no ponto $x = 1$? Por quê?

14. Decida se a afirmação é verdadeira ou falsa, justificando ou apresentando um contra-exemplo.

(a) Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é tal que $|f|$ é contínua em $x = 0$, então f é contínua em $x = 0$.

(b) Se f e g são funções descontínuas em $x = 0$, então a função fg é descontínua em $x = 0$.

☆ Derivadas

15. Sejam f e g funções deriváveis em um intervalo aberto **I**, $a \in \mathbf{I}$ e

$$h(x) = \begin{cases} f(x), & \text{se } x \geq a \\ g(x), & \text{se } x < a \end{cases}.$$

Prove que h é derivável em $x = a$ se, e somente se, $f(a) = g(a)$ e $f'(a) = g'(a)$.

16. Encontre constantes a, b e c tais que a função $f(x) = \begin{cases} ax^2+bx+c, & \text{se } x < 1 \\ x^2-5x+6, & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$ seja derivável em $\mathbb{R}$ e $f'(0) = 0$.

17. Verifique se f é contínua e derivável no ponto x_0, sendo:

(a) $f(x)=\begin{cases}(x^2+x)\cos\dfrac{1}{x}, & \text{se } x\neq 0\\ 0, & \text{se } x=0\end{cases}$, $x_0=0$

(b) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^3-x}{\sqrt{x-1}}, & \text{se } x>1\\ 1, & \text{se } x\leq 1\end{cases}$, $x_0=1$

(c) $f(x)=\begin{cases}x^2+\operatorname{sen} x, & \text{se } x>0\\ x^5+4x^3, & \text{se } x<0\\ 0, & \text{se } x=0\end{cases}$, $x_0=0$

(d) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{4}{5}x^5, & \text{se } x>1\\ x^4, & \text{se } x\leq 1\end{cases}$, $x_0=1$

(e) $f(x)=\begin{cases}x\operatorname{sen}\dfrac{1}{x}, & \text{se } x\neq 0\\ 0, & \text{se } x=0\end{cases}$, $x_0=0$

(f) $f(x)=\begin{cases}x^2\operatorname{sen}\dfrac{1}{x}, & \text{se } x\neq 0\\ 0, & \text{se } x=0\end{cases}$, $x_0=0$

(g) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\operatorname{sen} x}{x}, & \text{se } x\neq 0\\ 1, & \text{se } x=0\end{cases}$, $x_0=0$

(h) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\operatorname{sen}(x^2)}{\sqrt{x^2+x^4}}, & \text{se } x\neq 0\\ 0, & \text{se } x=0\end{cases}$, $x_0=0$

(i) $f(x)=|\operatorname{sen} x|$, $x_0=0$

j) $f(x)=|\operatorname{sen}(x^5)|$, $x_0=0$

k) $f(x)=\cos(\sqrt{|x|})$, $x_0=0$

18. Calcule $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}[(3+x)^2]-\operatorname{tg}9}{x}$.

19. Calcule $f'(x)$ para as funções f abaixo:

1) $f(x)=\dfrac{x+1}{x-1}$

2) $f(x)=\dfrac{(2x^3+1)^{32}}{x+2}$

3) $f(x)=\dfrac{4x-x^4}{(x^3+2)^{100}}$

4) $f(x)=x\operatorname{sen}\left(\sqrt{x^5}-x^2\right)$

5) $f(x)=\dfrac{\sqrt[3]{x^2}\cos x}{(x^4+\operatorname{tg}^2 x+1)^2}$

6) $f(x)=\sqrt[6]{x\operatorname{tg}^2 x}$

7) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}+\operatorname{cossec} x}{x^3+3x^2}$

8) $f(x)=\sec\left(\sqrt{x^2+1}\right)$

9) $f(x)=\dfrac{x^2\operatorname{tg}(x^3-x^2)}{\sec x}$

10) $f(x)=x\operatorname{sen} x\cos x$

11) $f(x)=\dfrac{(x+\lambda)^4}{x^4+\lambda^4}$

12) $f(x)=\dfrac{1}{\operatorname{sen}(x-\operatorname{sen} x)}$

13) $f(x)=\dfrac{2x}{\left(x+\sqrt{x}\right)^{\frac{1}{3}}}$

14) $f(x)=\operatorname{cotg}(3x^2+5)$

15) $f(x)=\dfrac{x^2}{\operatorname{sen}^{33}x\cos^{17}x}$

16) $f(x)=\dfrac{\sqrt[3]{x}\operatorname{sen} x}{x^2\cos(x^2)}$

20. Seja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ contínua em $\mathbb{R}$ tal que $|f(x)|\leq|x^3+x^2|$, para todo $x\in\mathbb{R}$. A função f é derivável em 0?

21. Seja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ derivável em $a\in\,]0,+\infty[$. Calcule, em termos de $f'(a)$, o limite: $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{\sqrt{x}-\sqrt{a}}$.

22. Discuta as seguintes "soluções" para a questão "Considere a função $f(x)=x|x|$. Decida se f é derivável em $x=0$ e, em caso afirmativo, calcule $f'(0)$. Justifique suas afirmações."

"Solução 1": $f'(0)=0$, pois $f(0)=0$.

"Solução 2": Como a função $g(x)=|x|$ não é derivável em $x=0$, não é possível usar a regra do produto para derivar f em $x=0$. Logo f não é derivável em $x=0$.

"Solução 3": Temos $f(x)=h(x)g(x)$, onde $h(x)=x$ e $g(x)=|x|$. Assim:

$$f'(0)=h'(0)g(0)+h(0)g'(0);$$

como $g(0)=0$ e $h(0)=0$ então $f'(0)=0$.

"Solução 4": Temos $f(x) = \begin{cases} -x^2, & \text{se } x < 0 \\ x^2, & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$. Logo

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \lim_{x \to 0^+} \frac{x^2 - 0}{x - 0} = \lim_{x \to 0^+} x = 0,$$

e

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^-} \frac{-x^2 - 0}{x - 0} = \lim_{x \to 0^-} -x = 0.$$

Portanto $\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 0$, ou seja $f'(0) = 0$.

23. Em que pontos f é derivável?

    (a) $f(x) = \sqrt{x^4 + x^6}$ (b) $f(x) = \sqrt{x^2 + x^4}$.

24. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivável em $x = 0$ tal que $f(0) = f'(0) = 0$. Seja $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função limitada e não derivável em $x = 0$. Calcule a derivada de $h(x) = f(x)\,g(x)$ no ponto $x = 0$.

25. Seja $f(x) = \sqrt[3]{x^3 - x^2}\,\text{sen}\,(\sqrt[3]{x})$.

    (a) Calcule $f'(3)$.

    (b) Calcule $f'(0)$.

    (c) Seja $g(x) = \dfrac{(5 + f(x))(2x + 3\sec x)}{x + \text{tg}\,x + 4}$, onde f é a função dada acima. Calcule $g'(0)$.

26. Mostrar que a reta $y = -x$ é tangente à curva $y = x^3 - 6x^2 + 8x$. Encontre o ponto de tangência.

27. Determine todos os pontos (x_0, y_0) sobre a curva $y = 4x^4 - 8x^2 + 16x + 7$ tais que a tangente à curva em (x_0, y_0) seja paralela à reta $16x - y + 5 = 0$.

28. Seja $f(x) = \dfrac{3x + 1}{x - 1}$. Determine todas as retas tangentes ao gráfico de f que passam pelo ponto $(0, 0)$.

29. Sejam $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função derivável até 2ª ordem e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $g(x) = x f(x + 1 + \text{sen}\,2x)$. Calcule $g''(x)$. Supondo $f'(1) = -2$, calcule $g''(0)$.

30. Seja $f(x) = |x^3|$. Calcule $f''(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$. A função f'' é derivável no ponto $x_0 = 0$? Justifique.

31. Sabe-se que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função derivável em $\mathbb{R}$ e que a reta tangente ao gráfico de f no ponto de abscissa 3 é $x + 2y = 6$. Seja $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $g(x) = (f(\sqrt{9 + 4x}))^2$. Determine $g'(0)$.

32. Mostre que qualquer par de retas tangentes à parábola $y = ax^2$ ($a \neq 0$) tem como intersecção um ponto que está numa reta vertical que passa pelo ponto médio do segmento que une os pontos de tangência destas retas.

33. Seja $y = f(x)$ uma função dada implicitamente pela equação $x^2 = y^3(2 - y)$. Admitindo f derivável, determine a reta tangente ao gráfico de f no ponto $(1, 1)$.

34. Seja $y = f(x)$ uma função dada implicitamente pela equação $x^2 + xy + y^2 = 3$. Admitindo f derivável, determine as possíveis retas tangentes ao gráfico de f que são normais à reta $x - y + 1 = 0$.

35. Seja f derivável num intervalo aberto I contendo $x=-1$ e tal que

$$(f(x))^3-(f(x))^2+xf(x)=2,$$

para todo $x\in I$. Encontre $f(-1)$ e a equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto $(-1,f(-1))$.

36. Suponha que f seja uma função injetora, derivável, e que sua inversa f^{-1} seja também derivável. Use derivação implícita para mostrar que

$$(f^{-1})'(x)=\frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

desde que o denominador não seja nulo.

37. Usando o exercício anterior, encontre $(f^{-1})'(5)$ sabendo que $f(4)=5$ e que $f'(4)=\frac{2}{3}$.

38. Calcule a derivada de cada uma das funções abaixo:

(a) $f(x)=\cos(\operatorname{arctg} x)$	(b) $f(x)=x^2\operatorname{arctg} x$	(c) $f(x)=\operatorname{arcsen}(x^2)$
(d) $f(x)=(1+\operatorname{arctg} x^2)^3$	(e) $f(x)=\dfrac{\operatorname{tg}(3x)}{\operatorname{arctg}(3x)}$	(f) $f(x)=\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}\right)$
(g) $f(x)=\sqrt{1-x^2}\operatorname{arcsen} x$	(h) $f(x)=x\operatorname{arctg}(x^2-x)$	(i) $f(x)=\operatorname{arcsen} x$

✰ Taxas relacionadas

39. (*Expansão Adiabática*) Quando certo gás composto sofre uma expansão adiabática, a sua pressão p e seu volume V satisfazem à equação $pV^{1,3}=k$, onde k é uma constante. Mostre que $-V\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}=1,3\,p\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}$.

40. De um petroleiro quebrado vaza um grande volume V de óleo num mar calmo. Após a turbulência inicial ter acabado, o petróleo se expande num contorno circular de raio r e espessura uniforme h, onde r cresce e h de cresce de um modo determinado pela viscosidade e flutuabilidade do óleo. Experiências de laboratório sugerem que a espessura é inversamente proporcional à raiz quadrada do tempo decorrido: $h=\dfrac{c}{\sqrt{t}}$. Mostre que a taxa $\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}$ com que o petróleo se expande é inversamente proporcional a $t^{3/4}$.

41. Num certo instante t_0, a altura de um triângulo cresce à razão de 1 cm/min e sua área aumenta à razão de 2 cm^2/min. No instante t_0, sabendo que sua altura é 10 cm e sua área é 100 cm^2, qual a taxa de variação da base do triângulo?

42. Despeja-se areia sobre o chão fazendo um monte que tem, a cada instante, a forma de um cone com diâmetro da base igual a três vezes a altura. Quando a altura do monte é de $1,2$ m, a taxa de variação com que a areia é despejada é de $0,081\text{m}^3/\text{min}$. Qual a taxa de variação da altura do monte neste instante?

43. A aresta de um cubo cresce ao longo do tempo. Num certo instante t_0, o seu volume cresce a uma taxa de $10\text{cm}^3/\text{min}$. Sabendo que, neste instante, a aresta do cubo mede 30cm, qual é a taxa de variação da área da superfície do cubo?

44. Uma lâmpada está no solo a 15m de um edifício. Um homem de $1,8$m de altura anda a partir da luz em direção ao edifício a $1,2$m/s. Determine a velocidade com que o comprimento de sua sombra sobre o edifício diminui quando ele está a 12m do edifício e quando ele está a 9m do edifício.

45. Uma tina de água tem 10 m de comprimento e uma seção transversal com a forma de um trapézio isósceles com 30 cm de comprimento na base, 80cm de extensão no topo e 50 cm de altura. Se a tina for preenchida com água a uma taxa de $0,2\ \text{m}^3/\text{min}$, quão rápido estará subindo o nível da água quando ela estiver a 30 cm de profundidade?

46. Uma câmera de televisão está posicionada a 4.000 pés de uma base de lançamento de foguete. O ângulo de elevação da câmera deve variar a uma taxa que possa focalizar o foguete. O mecanismo de foco da câmera também deve levar em conta o aumento da distância entre a câmera e o foguete. Vamos supor que o foguete suba verticalmente e com uma velocidade de 600 pés/s quando já tiver subido 3.000 pés. Quão rápido está variando a distância da câmera ao foguete nesse momento? Se a câmera de televisão apontar sempre na direção ao foguete, quão rápido estará variando o ângulo de elevação dela nesse mesmo momento?

47. (*Escada deslizante*) Uma escada de 25 pés está encostada na parede de uma casa e sua base está sendo empurrada no sentido contrário ao da parede. Num certo instante, a base da escada se encontra a 7 pés da parede e está sendo empurrada a uma taxa de 2 pés por segundo.

    (a) Qual a velocidade com a qual o topo da escada se move para baixo nesse instante?

    (b) Considere o triângulo formado pela parede da casa, a escada e o chão. Calcule a taxa de variação da área deste triângulo no instante em que a base da escada se encontra a 7 pés da parede.

    (c) Calcule a taxa de variação do ângulo formado pela parede da casa e a escada, quando a base da escada estiver a 7 pés da parede.

✰ Respostas

(1) (1) $-3/4$; (2) $1/5$; (3) $-1/6$; (4) 0; (5) $1/5$; (6) $3/7$; (7) $\sqrt{2}$; (8) $\frac{20}{301}$; (9) 2; (10) $1/2$; (11) $1/6$; (12) -1; 13) -1; 14) $1/3$; (15) $-\infty$; (16) 0; (17) não existe; (18) não existe; (19) 0; (20) $-\infty$; (21) $+\infty$; (22) $-1/2$; (23) 0; (24) $1/3$; (25) 1; (26) $-\infty$; (27) 0; (28) $-\infty$; (29) 3; (30) $32\sqrt{2}$; (31) 3; (32) 0; (33) $-\sqrt[4]{7}/2$; (34) $1/2$; (35) não existe; (36) $-\infty$.

(2) 0; **(3)** 0; 0; **(4)** 1; **(5)** $c=-1$, $L=5/2$; **(6)** (a) 2; (b) 0; (c) $+\infty$; **(8)** (a) Falsa; (b) Verdadeira; (c) Falsa; **(11)**(a) $\mathbb{R}$; (b) $\mathbb{R}\setminus\{3\}$; (c) $\mathbb{R}\setminus\{1\}$; (d) $\mathbb{R}$; **(12)** (a) $-\cos 2$; (b) 1; **(13)** Não; **(14)** (a), (b) são falsas; **(16)** $a=-3/2$, $b=0$ e $c=7/2$; **(17)** (a), (c), (e), (f), (g), (h), (i), (j), (k) são contínuas em x_0; (f), (g), (j) são deriváveis em x_0; **(18)** $6\sec^2 9$; **(20)** Sim; **(21)** $2\sqrt{a}f'(a)$; **(22)** Somente (4) está correta; **(23)** (a) em todos os pontos; (b) em $x_0 \neq 0$; **(24)** 0; **(25)** (a) $\frac{7}{3\sqrt[3]{12}}\operatorname{sen}(\sqrt[3]{3}) + \frac{\sqrt[3]{2}}{3}\cos(\sqrt[3]{3})$.; (b) -1; (c) $-\frac{1}{8}$;

(26) $(3,-3)$; **(27)** $(-1,-13)$, $y=16x+3$; $(0,7)$, $y=16x+7$; $(1,19)$, $y=16x+3$; **(28)** $y=9x$, $y=-x$; **(29)** -12; **(30)** Não; **(31)** -1; **(33)** $y=x$; **(34)** $y+x=2$; $y+x=-2$; **(35)** 2; $2x+7y-12=0$; **(41)** $-1,6$; **(42)** $\frac{1}{40\pi}$m/min; **(43)** $\frac{4}{3}\text{cm}^2/\text{min}$; **(44)** 3,6m/s; 0,9m/s; **(45)** $\frac{10}{3}$cm/min; **(46)** 360 pes/s; 0,096 rad/s; **(47)** (a) $\frac{7}{12}$pes/s; (b) $\frac{527}{24}\text{pes}^2/\text{s}$; (c) $\frac{1}{12}$rad/s.

Parte 2

☆ Teoremas do valor intermediário e do valor médio

1. Seja $h(x) = 2x + \cos x$.

   (a) Mostre que h é bijetora.

   (b) Calcule $h^{-1}(1)$.

   (c) Admitindo h^{-1} derivável, determine $(h^{-1})'(1)$.

2. Seja $f(x) = e^x - \frac{1}{x} - \frac{x}{2}$, $x > 0$.

   (a) Mostre que a equação
   $$e^x - \frac{1}{x} - \frac{x}{2} = y$$
   admite uma única solução para qualquer $y \in \mathbb{R}$. Conclua que f admite inversa.

   (b) Seja g a inversa de f. Mostre que $|g(x) - g(y)| \leq 2|x - y|$, para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$.

3. Seja $f(x) = \operatorname{tg} x + x^3$, $-\pi/2 < x < \pi/2$.

   (a) Mostre que a equação $\operatorname{tg} x + x^3 = y$ admite uma única solução para qualquer $y \in \mathbb{R}$. Conclua que f admite inversa.

   (b) Seja g a inversa de f. Mostre que $|g(x) - g(y)| \leq |x - y|$, para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$.

4. Seja $f(x) = 3x^5 + 5x^3 + 7\operatorname{sen} x$, $x \in \mathbb{R}$.

   (a) Mostre que f é inversível e sobrejetora.

   (b) Calcule f^{-1} em termos de f.

   (c) Se $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é a inversa de f, mostre que $|g(x) - g(y)| \leq \frac{1}{7}|x - y|$ para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$.

5. Seja $f(x) = x^5 + x^3 + 2x + 1$, g a sua inversa e $a, b \in \mathbb{R}$ com $a < b$. Mostre que
   $$g(b) - g(a) \leq \frac{1}{2}(b - a).$$

6. Seja $f(x) = x^7 + 8x^3 - x^5 - 8x$. Prove que $f'(x)$ tem duas raízes distintas no intervalo $]-1, 1[$.

7. Use o teorema do valor médio para provar as seguintes desigualdades:

   (a) $|\operatorname{sen} b - \operatorname{sen} a| \leq |b - a|$, para todos $a, b \in \mathbb{R}$.

   (b) $|\sqrt{a} - \sqrt{b}| \leq \frac{1}{2}|a - b|$, para todos $a, b \in \mathbb{R}$, com $a \geq 1$ e $b \geq 1$.

   (c) $\left|\ln \frac{a}{b}\right| \leq |a - b|$, para todos $a, b \in \mathbb{R}$, com $a \geq 1$ e $b \geq 1$.

   (d) $b^b - a^a > a^a(b - a)$, para todos $a, b \in \mathbb{R}$ com $1 \leq a < b$.

   (e) $e^x - e^y \geq x - y$, para todos x, y com $x \geq y \geq 0$.

8. Seja f uma função derivável no intervalo $]-1, +\infty[$. Mostre que se $f(0) = 0$ e $0 < f'(x) \leq 1$, para todo $x > 0$, então $0 < f(x) \leq x$, para todos $x > 0$.

9. Mostre que $f(x) = (1+x)^{1/x}$ é estritamente decrescente para $x > 0$. Conclua que

$$(1+\pi)^e < (1+e)^\pi.$$

10. Prove as seguintes desigualdades:

    (a) $2\sqrt{x} > 3 - \dfrac{1}{x}$, para todo $x > 1$
    (b) $e^\pi > \pi^e$
    (c) $\dfrac{\text{tg } b}{\text{tg } a} > \dfrac{b}{a}$ para $0 < a < b < \frac{\pi}{2}$
    (d) $x - \dfrac{x^3}{3!} < \operatorname{sen} x < x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!}$, para $x > 0$
    (e) $\sqrt{1+x} < 1 + \frac{1}{2}x$, para $x > 0$
    (f) $2x \operatorname{arctg} x > \ln(1+x^2)$, para $x > 0$
    (g) $e^x > 1 + x$ para $x > 0$
    (h) $e^x > 1 + x + \frac{x^2}{2}$ para $x > 0$
    (i) $x^n - 1 \geq n(x-1)$ para $x \geq 1$

11. Mostre que a equação $x^3 - 3x^2 + 6 = 0$ admite uma única raiz real e tente localizá-la.

12. Mostre que a equação $x^3 + x^2 - 5x + 1 = 0$ admite três raízes reais e tente localizá-las.

13. Determine os possíveis valores de a para os quais a equação

$$x^3 + 3x^2 - 9x + a = 0$$

    admite uma única raiz real.

14. Mostre que a equação $3x - 2 + \cos(\frac{\pi x}{2}) = 0$ tem exatamente uma raiz real.

15. Seja f derivável em $\mathbb{R}$ e seja g dada por $g(x) = \dfrac{f(x)}{x}$, $x \neq 0$. Suponha que x_0 é ponto de máximo local de g. Prove que

$$x_0 f'(x_0) - f(x_0) = 0.$$

    Prove que a reta tangente ao gráfico de f no ponto de abscissa x_0 passa pela origem.

16. Seja $f(x)$ um polinômio de grau 3, com três raízes reais distintas. Mostre que f tem um ponto de inflexão, que é a média aritmética das três raízes.

17. Sejam $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivável e $a, b \in \mathbb{R}$ tais que $f(a) = f(b) = 0$. Mostre que se $f'(a)f'(b) > 0$, então existe c entre a e b tal que $f(c) = 0$.

18. Para que valores de k a equação $2x^3 - 9x^2 + 12x = k$ tem três raízes reais distintas ?

19. Prove que se p é um polinômio, a equação $e^x - p(x) = 0$ não pode ter infinitas soluções reais. (Sugestão: Divida por x^n para um certo n suficientemente grande.)

20. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivável e com um único ponto crítico x_0. Prove que se x_0 for ponto de mínimo (máximo) local de f, então x_0 será o único ponto de mínimo (máximo) global de f.

21. Mostre que

(a) $\operatorname{arcsen}\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right) = 2\operatorname{arctg}(\sqrt{x}) - \dfrac{\pi}{2}$ para qualquer $x \in \mathbb{R}$.

(b) $2\operatorname{arcsen} x = \operatorname{arcsen}(1-2x^2)$, $-1 < x < 1$

22. Seja $a \in \mathbb{R}$ tal que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{ax-1}{ax+1}\right)^x = 4$. Determine a. **24.** $a = -\dfrac{1}{\ln 2}$

✰ Funções exponencial e logarítmica

23. Suponha que você receba as duas propostas abaixo para trabalhar por um mês:

A. Você recebe 1 milhão de reais no final do período.

B. Você recebe 1 centavo no primeiro dia, 2 centavos no segundo dia, 4 centavos no terceiro dia, e, em geral, 2^{n-1} centavos no n-ésimo dia.

Qual delas é mais lucrativa?

24. Calcule a derivada de cada uma das funções abaixo:

(a) $\cosh x = \dfrac{1}{2}(e^x + e^{-x})$ (b) $\sinh x = \dfrac{1}{2}(e^x - e^{-x})$ (c) $f(x) = e^{e^x}$

(d) $f(x) = x^e + e^x$ (e) $f(x) = e^{1/x^2} + \dfrac{1}{e^{x^2}}$ (f) $f(x) = \ln(e^x + 1)$

(g) $f(x) = (\ln x)^2 + (1+2^{x^3})^x$ (h) $f(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$ (i) $f(x) = x^\pi + \pi^x$

(j) $f(x) = 2^{x^2} + 3^{2x}$ (k) $f(x) = \ln(\operatorname{arctg} x)$ (l) $f(x) = \left(1+\cos^2 x\right)^{\operatorname{sen} x}$

(m) $f(x) = (e^x + 3x)^{\operatorname{arcsen}(x^2)}$ (n) $f(x) = (3+\cos x)^{\operatorname{tg}(x^2)}$ (o) $f(x) = \dfrac{\ln(x^3 + 2^{x^3})}{x^2 + e^{\cos x}}$

(p) $f(x) = (x^2+1)^{\operatorname{sen}(x^5)}$ (q) $f(x) = (1+\operatorname{arctg} x^2)^{1/x^4}$ (r) $f(x) = x^2 e^{\operatorname{arctg} x}$

(s) $f(x) = \ln\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}$ (t) $f(x) = x^{\ln(x^2+1)}$ (u) $f(x) = (1-\operatorname{sen} x)^{x^3-1}$

25. Calcule, caso exista

(a) $\displaystyle\lim_{x\to\frac{1}{2}^-}\frac{\ln(1-2x)}{\operatorname{tg}(\pi x)}$ (b) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x^{100}}{\sqrt[5]{x}}$ (c) $\displaystyle\lim_{x\to0^+}\frac{\ln x}{\operatorname{cotg} x}$

(d) $\displaystyle\lim_{x\to1^+}(\ln x)^{(x-1)}$ (e) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{e^{2x}}$ (f) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{xe^x}{e^{x^2}}$

(g) $\displaystyle\lim_{x\to0^+} x^\alpha \ln x$, $\alpha > 0$ (h) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha}{x}\right)$ (i) $\displaystyle\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{1-\cos x} - \frac{2}{x^2}\right)$

(j) $\displaystyle\lim_{x\to0}\left[\frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{e^x-1}\right]$ (k) $\displaystyle\lim_{x\to0^+}(x\operatorname{sen} x)^{\operatorname{tg} x}$ (l) $\displaystyle\lim_{x\to0}(e^x+3x)^{1/x}$

(m) $\displaystyle\lim_{x\to0^+} x^{\operatorname{tg}(x^2)}$ (n) $\displaystyle\lim_{x\to0^+}\left[\frac{1}{x} + \ln x\right]$ (o) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\operatorname{arctg}(2x^2)}{\ln(1+3x^2)}$

(p) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x^2)}{x\operatorname{arctg} x}$ (q) $\displaystyle\lim_{x\to0}(1+\operatorname{sen} 2x)^{1/\operatorname{sen} x}$ (r) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{x\operatorname{sen} x + 2x^2}{e^x + e^{-x} - 2}$

(s) $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+}(\operatorname{tg} x\sec x - \sec^2 x)$ (t) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x^{\ln 2/(1+\ln x)}$ (u) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}(1+3x)^{1/\ln x}$

(v) $\displaystyle\lim_{x\to0^+}(\operatorname{sen} x)^{1/\ln x}$ (w) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left[\ln(x+3)^{x+4} - \ln(x+2)^{x+4}\right]$ (x) $\displaystyle\lim_{x\to0^-}(1-\cos x)^{1/x}$

26. No seu livro de Cálculo de 1696, l'Hospital ilustrou sua regra com o limite da função

$$f(x) = \frac{\sqrt{2a^3x - x^4} - a\sqrt[3]{a^2x}}{a - \sqrt[4]{ax^3}}$$

quando $x \to a$, $a > 0$. Calcule este limite.

✰ Funções hiperbólicas

27. Mostre que a função $\sinh x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ é inversível e sua inversa é dada por

$$\operatorname{arcsinh} x = \ln(x + \sqrt{1+x^2}), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Encontre as inversas das demais funções hiperbólicas e também suas derivadas.

28. Mostre que $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$, $\operatorname{sech}^2 x = 1 - \tanh^2 x$ e $\coth^2 x = 1 + \operatorname{csch}^2 x$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

29. Mostre que $\cosh(x+y) = \sinh x \sinh y + \cosh x \cosh y$ e $\sinh(x+y) = \cosh x \sinh y + \cosh y \sinh x$, $x, y \in \mathbb{R}$.

30. Esboce os gráficos de todas as funções hiperbólicas e de suas inversas.

✰ Máximos e mínimos

31. Encontre $a \in \mathbb{R}$ para que $f(x) = x^2 + \dfrac{a}{x}$ tenha:
    (a) um mínimo local em $x = 2$.
    (b) um mínimo local em $x = -3$.
    (c) Mostre que f não terá máximo local para nenhum valor de a.

32. (a) Esboce o gráfico de $f(x) = x^2 e^{-x}$.
    (b) Determine, em função de k, o número de soluções reais da equação $ke^x = x^2$.

33. (a) Ache o ponto de mínimo de $f(x) = \dfrac{e^x}{x}$ no intervalo $]0, +\infty[$.
    (b) Prove que $\dfrac{e^{a+b}}{ab} \geq e^2$, para todos $a > 0$ e $b > 0$.

34. Seja f uma função. Se existir uma reta $y = mx + n$ tal que $\lim\limits_{x\to+\infty} [f(x) - (mx+n)] = 0$, dizemos que $y = mx + n$ é uma **assíntota** para f. Prove que a reta $y = mx + n$ é uma assíntota para f se, e somente se, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = m$ e $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - mx) = n$. (Tudo o que dissemos para $x \to +\infty$ vale também para $x \to -\infty$.)

35. Esboce o gráfico das funções abaixo e dê as equações das assíntotas, quando existirem.

(a) $f(x)=x^4+2x^3+1$ (b) $f(x)=\dfrac{x^3}{x^2-1}$ (c) $f(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$

(d) $f(x)=\dfrac{x^3-1}{x^3+1}$ (e) $f(x)=\dfrac{x-1}{x^2-4}$ (f) $f(x)=(3-\dfrac{6}{x})e^{\frac{2}{x}}$

(g) $f(x)=\sqrt[3]{x^3-x^2}$ (h) $f(x)=e^x-e^{3x}$ (i) $f(x)=x-3\ln x-\dfrac{2}{x}$

(j) $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$ (k) $f(x)=\sqrt[3]{x(x-1)^2}$ (l) $f(x)=x^x$

(m) $f(x)=\ln(2x)-\ln(3x^2+3)$ (n) $f(x)=\dfrac{2x^2}{x^2-1}$ (o) $f(x)=\dfrac{(x-2)^3}{x^2}$

(p) $f(x)=\dfrac{x^2-2x-3}{x+2}$ (q) $f(x)=\operatorname{arctg}(\ln x)$ (r) $f(x)=\dfrac{x^3-x+1}{x^2}$

(s) $f(x)=x^2\ln x$ (t) $f(x)=\dfrac{e^x}{x}$ (u) $f(x)=\dfrac{\ln x}{x^2}$

(v) $f(x)=x^3+x^2+x$ (w) $f(x)=\dfrac{x+1}{x^2+x+1}$ (x) $f(x)=\sqrt[3]{x^2-x}$

36. Achar os valores mínimo e máximo de:

(a) $f(x)=\operatorname{sen}x-\cos x,\ x\in[0,\pi]$

(b) $f(x)=\sqrt{3+2x-x^3}$, $-\frac{1}{2}\le x\le 1$

(c) $f(x)=\dfrac{1}{x}+\ln x$, $\frac{1}{2}\le x\le 4$

(d) $f(x)=\sqrt[3]{x^3-2x^2}$, $-1\le x\le 2$

(e) $f(x)=|x^4-2x^3|$, $0\le x\le 3$

(f) $f(x)=\frac{x^4}{4}-x^3-2x^2+3$, $-2\le x\le 3$

(g) $f(x)=x^3-3x^2+3x-1$, $-2\le x\le 1$

(h) $f(x)=\dfrac{x^5}{5}-\dfrac{x^4}{2}-x^3+4x^2-4x+1$, $-3\le x\le 3$

37. Para que números positivos a a curva $y=a^x$ corta a reta $y=x$?

38. Seja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ uma função derivável e seja $a\in\mathbb{R}$ fixado. Verifique se as afirmações são verdadeiras ou falsas, justificando sua resposta:

(a) Se $f'(x)>0$, para todo $x>a$, então
$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty.$$

(b) Se f é derivável até segunda ordem com $f'(x)>0$ e $f''(x)>0$, para todo $x>a$, então
$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty.$$

(c) Se $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=0$ então $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=L\in\mathbb{R}$.

(d) Se existe uma assíntota para f (quando $x\to+\infty$) com coeficiente angular m e se existe
$$\lim_{x\to+\infty}f'(x)=L,$$
então $L=m$.

(e) Se $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=m\in\mathbb{R},\ m\neq 0$ então f tem uma assíntota com coeficiente angular igual a m.

✰ **Aplicações**

39. Para que pontos da circunferência $x^2 + y^2 = 25$ a soma das distâncias a (2,0) e (-2,0) é mínima?

40. Achar os pontos da hipérbole $x^2 - y^2 = 1$ mais próximos de (0,1).

41. Um triângulo isóceles está circunscrito a um círculo de raio R. Se x é a altura do triângulo, mostre que sua área é mínima quando $x = 3R$.

42. Qual é o menor valor da constante a para o qual a desigualdade $ax + \frac{1}{x} \geq 2\sqrt{2}$ é válida para todo número positivo x?

43. Seja $f(x) = 5x^2 + \dfrac{a}{x^5}$, $x > 0$, onde $a > 0$. Ache o menor valor de a de modo que $f(x) \geq 28$, $\forall x > 0$.

44. Um cilindro é obtido girando-se um retângulo ao redor do eixo x, onde a base do retângulo está apoiada. Seus vértices superiores estão sobre a curva $y = \dfrac{x}{x^2+1}$. Qual é o maior volume que tal cilindro pode ter?

45. (a) Latas cilíndricas fechadas devem ser feitas com um volume V especificado. Qual é a razão entre a altura e o diâmetro da base que minimiza a quantidade de metal gasto para fazer a lata?

    (b) Por que as latas encontradas no supermercado não são em geral como em (a)? Em geral o metal vem em uma chapa retangular. Não há desperdício envolvido em cortar a chapa que formará a superfície lateral, mas as tampas devem ser cortadas de uma peça quadrada, e as sobras, são desprezadas (ou então recicladas). Ache a razão entre a altura e o diâmetro de uma lata de volume V que minimiza o custo do material utilizado.

46. Um arame de comprimento L deve ser cortado em 2 pedaços, um para formar um quadrado e outro um triângulo equilátero. Como se deve cortar o arame para que a soma das áreas cercadas pelos 2 pedaços seja (a) máxima? (b) mínima? Mostre que no caso (b) o lado do quadrado é 2/3 da altura do triângulo.

47. Um canhão situado no solo é posto sob um ângulo de inclinação θ. Seja r o alcance do canhão, isto é, a distância entre o canhão e o ponto de impacto da bala. Então r é dado por $r = \frac{2v^2 \operatorname{sen}\theta \cos\theta}{g}$, onde v e g são constantes. Para que ângulo o alcance é máximo?

48. Determine o cone circular reto de maior volume que pode ser inscrito numa esfera de raio 3.

49. Deseja-se construir uma esfera e um cubo de modo que a soma das áreas de suas superfícies seja igual a 2. Determine o raio da esfera que maximiza e o que minimiza a soma de seus volumes.

50. Um muro de 2 metros de altura está a 1 metro de distância da parede lateral de um prédio. Qual o comprimento da menor escada cujas extremidades se apóiam uma na parede, e outra no chão do lado de fora do muro?

51. Um papel de filtro circular de raio a deve ser transformado em um filtro cônico cortando um setor circular e juntando as arestas CA e CB. Ache a razão entre o raio e a profundidade do filtro de capacidade máxima.

52. (LEI DE REFRAÇÃO DE SNELLIUS) O objetivo desta questão é demonstrar como a *lei da refração de Snellius*, da Óptica Geométrica, pode ser obtida como conseqüência do *princípio de Fermat*, segundo o qual “a trajetória dos raios de luz é aquela que minimiza o tempo de percurso”.

Sejam $P \in \mathbb{R}^2$ um ponto no semi-plano superior e $Q \in \mathbb{R}^2$ um ponto no semi-plano inferior, ambos fixados. Uma partícula vai de P a um ponto $M = (x, 0)$ sobre o eixo Ox com velocidade constante u e movimento retilíneo; em seguida, vai de M até Q com velocidade constante v, também em movimento retilíneo. Seja $T \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que, para todo $x \in \mathbb{R}$, $T(x)$ é o tempo de percurso de P a Q. Mostre que T possui um único ponto de mínimo $x_0 \in \mathbb{R}$. Verifique que $x_0 \in (0, b)$ e que, se $x = x_0$, então $\dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{u} = \dfrac{\operatorname{sen}\beta}{v}$.

53. Deve-se construir uma estrada ligando uma fábrica A a uma ferrovia que passa por uma cidade B. Assumindo-se que a estrada e a ferrovia sejam ambas retilíneas, e que os custos de frete por unidade de distância sejam m vezes maiores na estrada do que na ferrovia, encontre o ângulo α a que a estrada deve ser conectada à ferrovia de modo a minimizar o custo total do frete da fábrica até a cidade. Assuma $m > 1$.

54. Um corredor de largura a forma um ângulo reto com um segundo corredor de largura b. Uma barra longa, fina e pesada deve ser empurrada do piso do primeiro corredor para o segundo. Qual o comprimento da maior barra que pode passar pela esquina?

Respostas

(1) (b) 0; (c) $\dfrac{1}{2}$; **(13)** $a > 5$ ou $a < -27$; **(18)** $4 < k < 5$; **(23)** B;

(25) (a) 0; (b) 0; (c) 0; (d) 1; (e) 0; (f) 0; (g) 0; (h) α; (i) $\frac{1}{6}$; (j) 1; (k) 1; (l) e^4; (m) 1; (n) $+\infty$; (o) $\frac{2}{3}$; (p) 1; (q) e^2; (r) 3; (s) $-\dfrac{1}{2}$; (t) 2; (u) e; (v) e; (w) 1; (x) $+\infty$; **(26)** $\dfrac{16a}{9}$; **(31)** (a) $a = 16$; (b) $a = -54$;

(32) Não há soluções se $k < 0$; tem 1 solução se $k = 0$ ou $k > \dfrac{4}{e^2}$; tem 2 soluções se $k = \dfrac{4}{e^2}$; tem 3 soluções se $0 < k < \dfrac{4}{e^2}$.

(33) (a) $x_0 = 1$; **(36)** (a) -1, $\sqrt{2}$; (b) $\sqrt{\frac{17}{8}}$, $\sqrt{3 + \sqrt{\frac{32}{27}}}$; (c) 4, 1; (d) $-\sqrt[3]{3}$, 0; (e) 0, 27; (f) $-87/4$, 7; (g) -27, 0; (h) $f(-3)$, $f(-2)$; **(37)** $a \le e^{\frac{1}{e}}$;

(38) (b) e (d) são verdadeiras e (a), (c), (e) são falsas; **(39)** $(5,0)$ e $(-5,0)$; **(40)** $\left(\pm\dfrac{\sqrt{5}}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$; **(42)** $a = 2$;

(43) $a = 2^8$; **(44)** $\pi/4$; **(45)** (a) 1; (b) $4/\pi$; **(46)** (a) Deve-se formar apenas um quadrado; (b) o lado do quadrado é $\frac{\sqrt{3}L}{9+4\sqrt{3}}$;

(47) $\pi/4$; **(48)** $h = 4$, $r = 2\sqrt{2}$; **(49)** $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$; $\frac{1}{\sqrt{2\pi+12}}$; **(50)** $\left(1 + \sqrt[3]{4}\right)^{3/2}$; **(51)** $\sqrt{2}$; **(53)** $\pi - \max\{\beta, \operatorname{arcsen}(\frac{1}{m})\}$; **(54)** $(a^{2/3} + b^{2/3})^{3/2}$.

Parte 3

✰ Integrais definidas

1. Calcule as integrais definidas abaixo:

(1) $\int_{-1}^{0}(2x-e^x)dx$ (2) $\int_{-2}^{2}(3x+1)^2dx$ (3) $\int_{0}^{1}(2x+5)(3x+1)dx$

(4) $\int_{0}^{\pi/4}\frac{1+\cos^2\theta}{\cos^2\theta}d\theta$ (5) $\int_{0}^{2}\frac{1+\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}}dx$ (6) $\int_0^{2\pi}|\operatorname{sen}\theta|d\theta$

(7) $\int_{0}^{\pi}x\operatorname{sen}(nx),\ n\in\mathbb{N}$ (8) $\int_{0}^{\pi}x\cos(nx)dx,\ n\in\mathbb{N}$ (9) $\int_{-1}2xe^xdx$

(10) $\int_{-1}^{2}x^2e^xdx$ (11) $\int_{0}^{\pi/2}\cos^2\theta d\theta$ (12) $\int_{0}^{\pi/2}\operatorname{sen}^2\theta d\theta$

(13) $\int_{-3}^{3}(\operatorname{sen}(x^5)-7x^7\cos x-x+1)dx$ (14) $\int_{-2}^{2}(x\cos(x^2+2x)+3x)dx$ (15) $\int_{0}^{2}xe^{x^2}dx$

(16) $\int_{0}^{\pi/4}\operatorname{tg}^2\theta d\theta$ (17) $\int_{0}^{\pi/2}\operatorname{sen}^4\theta d\theta$ (18) $\int_{0}^{\pi/2}\cos^4\theta d\theta$

(19) $\int_{0}^{\pi/4}\sec\theta d\theta$ (20) $\int_{0}^{1}x^2\sqrt{x+1}dx$ (21) $\int_{0}^{1/2}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

(22) $\int_{0}^{1}e^{\sqrt{x}}dx$ (23) $\int_{0}^{2\pi}\sqrt{1+\cos x}dx$ (24) $\int_{0}^{2}\frac{e^x}{\sqrt{1+e^x}}dx$

(25) $\int_{0}^{1}\sqrt{1+x^2}dx$ (26) $\int_{0}^{1/2}\frac{x}{\sqrt{1-x^4}}dx$ (27) $\int_{-1}^{1}x^3\operatorname{sen}(x^2+1)dx$

(28) $\int_{-1}^{1}\frac{x^2}{4+x^6}dx$ (29) $\int_{0}^{1}\frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}}dx$ (30) $\int_{1}^{2}\frac{1}{x(\ln x)^2}dx$

2. Encontre o volume de uma pirâmide cuja base é o quadrado de lado L e cuja altura é h.

3. Calcule o volume do sólido cuja base é a astróide de equação $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$ e tal que as seções transversais por planos paralelos ao plano Oxz são quadrados.

4. Calcule $\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{n}\left(\operatorname{sen}\frac{\pi}{n}+\operatorname{sen}\frac{2\pi}{n}+...+\operatorname{sen}\frac{(n-1)\pi}{n}\right)$.

5. Calcule o comprimento do gráfico de $f(x)=\ln(\cos x)$, para $0\le x\le\frac{\pi}{4}$.

6. Calcule o comprimento da astróide $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$.

7. Calcule a área da região interna ao laço formado pela curva $y^2=x^2(x+3)$.

8. Calcule a área da região do plano limitada pela elipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

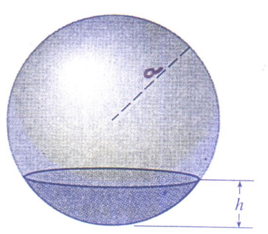
9. Determine o volume do sólido obtido pela rotação em torno do eixo Ox do conjunto
   a) $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:0\le xy\le 2,\ x^2+y^2\le 5 \text{ e } x>0\}$.
   b) $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:y\ge\sqrt{x} \text{ e } (x-1)^2+y^2\le 1\}$.
   c) $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:0\le x\le 2 \text{ e } e^{-x}\le y\le e^x\}$.
   d) $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:x>0,\ y\le 1 \text{ e } 1/x\le y\le 4/x^2\}$.

10. Calcule o volume do sólido obtido pela rotação em torno da reta $y = 3$ da região delimitada pelas parábolas $y = x^2$ e $y = 2 - x^2$.

11. Seja $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1 \text{ e } \ln(x+1) + 2 \leq y \leq e^x + 4\}$. Determine o volume do sólido obtido pela rotação de A em torno da reta $y = 2$.

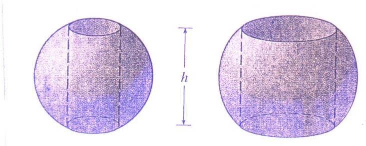
12. O disco $x^2 + y^2 \leq a^2$ é girado em torno da reta $x = b$, com $b > a$, para gerar um sólido, com a forma de um pneu. Esse sólido é chamado **toro**. Calcule seu volume.

13. Calcule o volume de uma calota esférica de altura h, $h \leq a$, de uma esfera de raio a.



14. Determine o comprimento da curva $y = \cosh x$, $-3 \leq x \leq 4$.

15. Um anel esférico é o sólido que permanece após a perfuração de um buraco cilíndrico através do centro de uma esfera sólida. Se a esfera tem raio R e o anel esférico tem altura h, prove o fato notável de que o volume do anel depende de h, mas não de R.



✰ **Primitivas**

16. Calcule as integrais indefinidas abaixo:

1. $\int \frac{x^7 + x^2 + 1}{x^2}\, dx$	2. $\int e^{2x}\, dx$	3. $\int \cos 7x\, dx$	4. $\int \operatorname{tg}^2 x\, dx$
5. $\int \frac{7}{x-2}\, dx$	6. $\int \operatorname{tg}^3 x \sec^2 x\, dx$	7. $\int \frac{\operatorname{sen}^3 x}{\sqrt{\cos x}}\, dx$	8. $\int \operatorname{tg} x\, dx$
9. $\int \operatorname{tg}^3 x\, dx$	10. $\int \frac{x}{1+x^2}\, dx$	11. $\int \frac{x}{1+x^4}\, dx$	12. $\int \frac{x^2}{1+x^2}\, dx$
13. $\int x\sqrt{1-x^2}\, dx$	14. $\int \sec x\, dx$	15. $\int \frac{dx}{x\sqrt{1+\ln x}}$	16. $\int x^2 \sqrt[5]{x^3+1}\, dx$
17. $\int \frac{4x+8}{2x^2+8x+20}\, dx$	18. $\int \frac{\sqrt{\ln x}}{x}\, dx$	19. $\int \frac{dx}{(\operatorname{arcsen} x)\sqrt{1-x^2}}$	20. $\int \frac{e^x}{1+e^x}\, dx$
21. $\int \frac{\operatorname{sen} 2x}{1+\cos^2 x}\, dx$	22. $\int e^{x^3} x^2\, dx$	23. $\int e^x \sqrt[3]{1+e^x}\, dx$	24. $\int \frac{\operatorname{sen}\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\, dx$

21. $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen} 2x}{1+\cos^2 x}\,dx$ 22. $\displaystyle\int e^{x^3} x^2\,dx$ 23. $\displaystyle\int e^x \sqrt[3]{1+e^x}\,dx$ 24. $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen}\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx$

25. $\displaystyle\int \frac{e^{\operatorname{arctg} x}}{1+x^2}\,dx$ 26. $\displaystyle\int 2x(x+1)^{2010}\,dx$ 27. $\displaystyle\int x \operatorname{sen} x\,dx$ 28. $\displaystyle\int e^x \cos x\,dx$

29. $\displaystyle\int x^r \ln x\,dx, r \in \mathbb{R}$ 30. $\displaystyle\int (\ln x)^2\,dx$ 31. $\displaystyle\int xe^{-x}\,dx$ 32. $\displaystyle\int x \operatorname{arctg} x\,dx$

33. $\displaystyle\int \operatorname{arcsen} x\,dx$ 34. $\displaystyle\int \sec^3 x\,dx$ 35. $\displaystyle\int \cos^2 x\,dx$ 36. $\displaystyle\int \operatorname{sen}^2 x \cos^3 x\,dx$

37. $\displaystyle\int \operatorname{sen}^2 x \cos^2 x\,dx$ 38. $\displaystyle\int \frac{1-\operatorname{sen} x}{\cos x}\,dx$ 39. $\displaystyle\int \frac{3x^2+4x+5}{(x-1)(x-2)(x-3)}\,dx$ 40. $\displaystyle\int \frac{dx}{2x^2+8x+20}$

41. $\displaystyle\int \frac{3x^2+4x+5}{(x-1)^2(x-2)}\,dx$ 42. $\displaystyle\int \frac{x^5+x+1}{x^3-8}\,dx$ 43. $\displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$ 44. $\displaystyle\int x^2\sqrt{1-x^2}\,dx$

45. $\displaystyle\int e^{\sqrt{x}}\,dx$ 46. $\displaystyle\int \ln(x+\sqrt{1+x^2})\,dx$ 47. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{5-2x+x^2}}$ 48. $\displaystyle\int \sqrt{x}\ln x\,dx$

49. $\displaystyle\int \operatorname{sen}(\ln x)\,dx$ 50. $\displaystyle\int \frac{x}{x^2-4}\,dx$ 51. $\displaystyle\int \frac{3x^2+5x+4}{x^3+x^2+x-3}\,dx$ 52. $\displaystyle\int \sqrt{a^2+b^2x^2}\,dx$

53. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{a^2+b^2x^2}}$ 54. $\displaystyle\int \sqrt{x^2-2x+2}\,dx$ 55. $\displaystyle\int \sqrt{3-2x-x^2}\,dx$ 56. $\displaystyle\int \frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{1-x^2}}$

57. $\displaystyle\int \cos^3 x\,dx$ 58. $\displaystyle\int \operatorname{sen}^5 x\,dx$ 59. $\displaystyle\int \frac{\cos^5 x}{\operatorname{sen}^3 x}\,dx$ 60. $\displaystyle\int \operatorname{sen}^3\left(\frac{x}{2}\right)\cos^5\left(\frac{x}{2}\right)\,dx$

61. $\displaystyle\int \frac{dx}{\operatorname{sen}^5 x\cos^3 x}$ 62. $\displaystyle\int \operatorname{sen}^4 x\,dx$ 63. $\displaystyle\int \operatorname{sen}^2 x\cos^5 x\,dx$ 64. $\displaystyle\int \operatorname{sen}^2 x\cos^4 x\,dx$

65. $\displaystyle\int \cos^6(3x)\,dx$ 66. $\displaystyle\int \frac{\cos^2 x}{\operatorname{sen}^6 x}\,dx$ 67. $\displaystyle\int \frac{dx}{\operatorname{sen}^2 x\cos^4 x}$ 68. $\displaystyle\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,dx$

69. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}$ 70. $\displaystyle\int \frac{x+1}{x^2(x^2+4)^2}\,dx$ 71. $\displaystyle\int \frac{\operatorname{arctg} x}{x^2}\,dx$ 72. $\displaystyle\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{2x-x^2}}\,dx$

73. $\displaystyle\int \frac{4x^2-3x+3}{(x^2-2x+2)(x+1)}\,dx$ 74. $\displaystyle\int \frac{dx}{1+e^x}$ 75. $\displaystyle\int \frac{\ln(x+1)}{x^2}\,dx$ 76. $\displaystyle\int x^5 e^{-x^3}\,dx$

77. $\displaystyle\int \frac{x+1}{x^2(x^2+4)}\,dx$ 78. $\displaystyle\int \operatorname{arctg}\sqrt{x}\,dx$ 79. $\displaystyle\int \frac{2x+1}{x^2+2x+2}\,dx$ 80. $\displaystyle\int \cos^3 x(1+\sqrt{\operatorname{sen} x})\,dx$

✰ Funções definidas por integrais

17. Calcule $g'(x)$ onde

(a) $g(x)=\displaystyle\int_{\cos x}^{\operatorname{sen} x} e^{t^2}\,dt$ (b) $g(x)=\displaystyle\int_{\sqrt{x}}^{2\sqrt{x}} \operatorname{sen}(t^2)\,dt$ (c) $g(x)=\displaystyle\int_{\operatorname{sen} x}^{x^3} \frac{dt}{1+t^4}$

18. Esboce o gráfico das funções abaixo:

(a) $f(x)=\displaystyle\int_0^x e^{-t^2}\,dt$ (b) $f(x)=\displaystyle\int_0^x \frac{\operatorname{sen} t}{t}\,dt$

19. Calcule $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\operatorname{sen} x\cos x}{x+1}\,dx$ em termos de $A=\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\cos x}{(x+2)^2}\,dx$.

20. Seja f uma função contínua em um intervalo I contendo a origem e seja

$$y=y(x)=\int_0^x \operatorname{sen}(x-t)f(t)\,dt$$

Prove que $y'' + y = f(x)$ e $y(0) = y'(0) = 0$, para todo $x \in I$.

21. Seja $F(x) = \int_0^x \sqrt{1+t^3}\,dt$. Calcule $\int_0^2 xF(x)\,dx$ em termos de $F(2)$.

22. Calcule $\lim_{x\to 0} \dfrac{\int_0^{x^2} \cos(t^2)\,dt}{\int_0^x e^{-t^2}\,dt}$.

23. Mostre que $f(x) = \int_0^{1/x} \dfrac{1}{t^2+1}\,dt + \int_0^x \dfrac{1}{t^2+1}\,dt$ é constante em $(0,\infty)$. Qual o valor dessa constante?

24. Seja $f(x) = \int_0^x \dfrac{1}{\sqrt{1+t^4}}\,dt$, $x \in \mathbb{R}$.

    (a) Mostre que f é crescente e ímpar.

    (b) Mostre que $f(x) \le f(1) + 1 - \dfrac{1}{x}$, $\forall x \ge 1$. (Sugestão: Integre $0 \le \frac{1}{\sqrt{1+t^4}} \le \frac{1}{t^2}$ de 1 a x.)

    (c) Mostre que $\lim_{x\to\infty} f(x)$ existe e é um número real positivo.

    (d) Esboce o gráfico de $f(x)$, localizando seu ponto de inflexão.

25. Seja $f(x) = \int_0^x e^{\frac{x^2-t^2}{2}}\,dt$. Mostre que $f'(x) - xf(x) = 1$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

26. Seja $F : [1,+\infty[\to \mathbb{R}$ dada por $F(x) = \int_1^x \sqrt{t^3-1}\,dt$.

    (a) Calcule o comprimento do gráfico de F entre $x = 1$ e $x = 4$.

    (b) Calcule $\lim_{x\to 2} \dfrac{F(x^3) - F(8)}{\operatorname{sen}(x-2)}$

☆ Respostas

(1)

(1) $e^{-1}-2$; (2) 52; (3) $31/2$; (4) $1+\pi/4$; (5) $2\sqrt{3}+\frac{6}{5}\sqrt[6]{32}$; (6) 4; (7) 0 se $n=0$ e $(-1)^{n+1}\pi/n$ se $n>0$; (8) 0 se n é par e $-2/n^2$ se n é ímpar; (9) e^2+2/e; (10) e^2-1/e; (11) $\pi/4$; (12) $\pi/4$; (13) 6; (14) 0; (15) $(e^4-1)/2$; (16) $1-\pi/4$; (17) $3\pi/8$; (18) $3\pi/8$; (19) $\ln(1+\sqrt{2})$; (20) $16/105$; (21) $\pi/6$; (22) 2; (23) $4\sqrt{2}$; (24) $2(\sqrt{1+e^2}-\sqrt{2})$; (25) $\frac{\ln(\sqrt{2}+1)+\sqrt{2}}{2}$; (26) $\frac{\operatorname{arcsen}(1/4)}{2}$; (27) 0; (28) $\frac{\operatorname{arctg}(1/2)}{3}$; (29) $\frac{2-\sqrt{2}}{3}$; (30) $\frac{1}{\ln 2} - \frac{1}{\ln 3}$.

(2) $\frac{l^2 h}{3}$; **(3)** $\frac{128}{105}a^3$; **(4)** 2; **(5)** $\ln(1+\sqrt{2})$; **(6)** $6a$; **(7)** $\frac{24}{5}\sqrt{3}$; **(8)** πab;

(9) (a) $\frac{5\sqrt{5}-2}{3}\pi$; (b) $\frac{\pi}{6}$; (c) $\frac{\pi}{2}(e^2-e^{-2})^2$; (d) $\frac{5\pi}{6}$. **(10)** $\frac{32}{3}\pi$; **(11)** $\pi\left(\frac{e^2}{2}+4e-2(\ln 2)^2+4\ln 2-\frac{3}{2}\right)$

(12) $(2\pi b)(\pi a^2)$; **(13)** $\pi h^2(a-\frac{h}{3})$; **(14)** $\sinh 4 + \sinh 3$.

(16)

(1) $\frac{x^6}{6}+x-\frac{1}{x}+C$ (2) $\frac{e^{2x}}{2}+C$ (3) $\frac{1}{7}\operatorname{sen}7x+C$

(4) $\operatorname{tg}x-x+C$ (5) $7\ln|x-2|+C$ (6) $\frac{1}{4}\operatorname{tg}^4x+C$

(7) $2\sqrt{\cos x}(\frac{1}{5}\cos^2x-1)+C$ (8) $-\ln|\cos x|+C$ (9) $\frac{1}{2}\operatorname{tg}^2x+\ln|\cos x|+C$

(10) $\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+C$ (11) $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x^2+C$ (12) $x-\operatorname{arctg}x+C$

(13) $-\frac{1}{3}\sqrt{(1-x^2)^3}+C$ (14) $\ln|\sec x+\operatorname{tg}x|+C$ (15) $2\sqrt{1+\ln x}+C$

(16) $\frac{5}{18}\sqrt[5]{(x^3+1)^6}+C$ (17) $\ln(2x^2+8x+20)+C$ (18) $\frac{2}{3}\sqrt{(\ln x)^3}+C$

(19) $\ln|\operatorname{arcsen}x|+C$ (20) $\ln(1+e^x)+C$ (21) $-\ln(1+\cos^2x)+C$

(22) $\frac{1}{3}e^{x^3}+C$ (23) $\frac{3}{4}\sqrt[3]{(1+e^x)^4}+C$ (24) $-2\cos\sqrt{x}+C$

(25) $e^{\operatorname{arctg}x}+C$ (26) $2(x+1)^{2011}(\frac{x+1}{2012}-\frac{1}{2011})+C$ (27) $-x\cos x+\operatorname{sen}x+C$

(28) $\frac{1}{2}e^x(\operatorname{sen}x+\cos x)+C$ (29) $\begin{cases}\frac{x^{r+1}}{r+1}\ln x-\frac{x^{r+1}}{(r+1)^2}+C, \text{ se } r\neq -1\\ \frac{1}{2}(\ln x)^2+C, \text{ se } r=-1\end{cases}$ (30) $x(\ln x)^2-2(x\ln x-x)+C$

(31) $(-x-1)e^{-x}+C$ (32) $\frac{x^2}{2}\operatorname{arctg}x-\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x+C$

(33) $x\operatorname{arcsen}x+\sqrt{1-x^2}+C$ (34) $\frac{1}{2}\sec x\operatorname{tg}x+\frac{1}{2}\ln\sec x+\operatorname{tg}x|+C$

(35) $\frac{1}{2}(x+\operatorname{sen}x\cos x)+C$ (36) $\frac{1}{3}\operatorname{sen}^3x-\frac{1}{5}\operatorname{sen}^5x+C$

(37) $\frac{1}{8}(x-\frac{1}{4}\operatorname{sen}4x)+C$ (38) $\ln|1+\operatorname{sen}x|+C$

(39) $6\ln|x-1|-25\ln|x-2|+22\ln|x-3|+C$ (40) $\frac{\sqrt{6}}{12}\operatorname{arctg}(\frac{x+2}{\sqrt{6}})+C$

(41) $-22\ln|x-1|+\frac{12}{x-1}+25\ln|x-2|+C$

(42) $\frac{x^3}{3}+\frac{35}{12}\ln|x-2|+\frac{61}{24}\ln(1+(\frac{x+1}{\sqrt{3}})^2)+\frac{\sqrt{3}}{12}\operatorname{arctg}(\frac{x+1}{\sqrt{3}})+C$

(43) $\frac{1}{2}\operatorname{arcsen}x-\frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2}+C$ (44) $\frac{x}{8}(2x^2-1)\sqrt{1-x^2}+\frac{1}{8}\operatorname{arcsen}x+C$

(45) $2(\sqrt{x}-1)e^{\sqrt{x}}+C$ (46) $x\ln(x+\sqrt{1+x^2})-\sqrt{1+x^2}+C$

(47) $\ln|\sqrt{5-2x+x^2}+x-1|+C$ (48) $\frac{2}{3}x\sqrt{x}(\ln x-\frac{2}{3})+C$

(49) $\frac{x}{2}(\operatorname{sen}(\ln x)-\cos(\ln x))+C$ (50) $\frac{1}{2}\ln|x^2-4|+C$

(51) $2\ln|x-1|+\frac{1}{2}\ln(x^2+2x+3)+\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}(\frac{x+1}{\sqrt{2}})+C$

(52) $x\sqrt{a^2+b^2x^2}+\frac{a^2}{2b}\ln(\frac{bx}{a}+\frac{\sqrt{a^2+b^2x^2}}{a})+C$

(53) $\frac{1}{b}\ln(\frac{bx}{a}+\frac{\sqrt{a^2+b^2x^2}}{a})+C$ (54) $\frac{x-1}{2}\sqrt{x^2-2x+2}+\frac{1}{2}\ln(x-1+\sqrt{x^2-2x+2})$ +C

(55) $\frac{x+1}{2}\sqrt{3-2x-x^2}+2\operatorname{arcsen}(\frac{x+1}{2})+C$

(56) $\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}(\frac{x\sqrt{2}}{\sqrt{1-x^2}})+C$ (57) $\operatorname{sen}x-\frac{1}{3}\operatorname{sen}^3x+C$

(58) $-\cos x+\frac{2}{3}\cos^3x-\frac{1}{5}\cos^5x+C$ (59) $\frac{1}{2}\operatorname{sen}^2x-\frac{1}{2\operatorname{sen}^2x}-2\ln|\operatorname{sen}x|+C$

(60) $\frac{1}{4}\cos^8(\frac{x}{2})-\frac{1}{3}\cos^6(\frac{x}{2})+C$ 61) $\frac{1}{2}\operatorname{tg}^2x+3\ln|\operatorname{tg}x|-\frac{3}{2\operatorname{tg}^2x}-\frac{1}{4\operatorname{tg}^4x}+C$

(62) $\frac{3}{8}x-\frac{1}{4}\operatorname{sen}(2x)+\frac{1}{32}\operatorname{sen}(4x)+C$

(63) $\frac{1}{3}\operatorname{sen}^3x-\frac{2}{5}\operatorname{sen}^5x+\frac{1}{7}\operatorname{sen}^7x+C$ (64) $\frac{x}{16}-\frac{1}{64}\operatorname{sen}(4x)+\frac{1}{48}\operatorname{sen}^3(2x)+C$

(65) $\frac{5}{16}x+\frac{1}{12}\operatorname{sen}(6x)+\frac{1}{64}\operatorname{sen}(12x)-\frac{1}{144}\operatorname{sen}^3(6x)+C$

(66) $-\frac{1}{3}\operatorname{cotg}^3x-\frac{1}{5}\operatorname{cotg}^5x+C$ (67) $\operatorname{tg}x+\frac{1}{3}\operatorname{tg}^3x-2\operatorname{cotg}(2x)+C$

(68) $\operatorname{arcsen}x+\sqrt{1-x^2}+C$ (69) $2\sqrt{x}+3\sqrt[3]{x}+6\sqrt[6]{x}+6\ln|\sqrt[6]{x}-1|+C$

(70) $\frac{1}{16}\ln|x|-\frac{1}{16x}-\frac{1}{32}\ln(x^2+4)-\frac{3}{64}\operatorname{arctg}\frac{x}{2}+\frac{4-x}{32(x^2+4)}+C$

(71) $\frac{-\operatorname{arctg}x}{x}+\ln|x|-\ln\sqrt{1+x^2}+C$ (72) $\frac{3}{2}\operatorname{arcsen}(x-1)-\left(\frac{x+3}{2}\right)\sqrt{2x-x^2}+C$

(73) $2\ln|x+1|+\ln(x^2-2x+2)+3\operatorname{arctg}(x-1)+C$

(74) $x-\ln(1+e^x)+C$ (75) $-\frac{\ln(x+1)}{x}+\ln|x|-\ln(x+1)+C$

(76) $-\frac{1}{3}(x^3+1)e^{-x^3}+C$ (77) $\frac{1}{4}\ln|x|-\frac{1}{4x}-\frac{1}{8}\ln(x^2+4)-\frac{1}{16}\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{2}\right)+C$

(78) $(x+1)\operatorname{arctg}\sqrt{x}-\sqrt{x}$ (79) $\ln(x^2+2x+2)-\operatorname{arctg}(x+1)+C$

(80) $\operatorname{sen}x+2\sqrt{\operatorname{sen}x}-\frac{\operatorname{sen}^3x}{3}-\frac{2\sqrt{\operatorname{sen}^5x}}{5}+C$

(17) (a) $g'(x)=e^{\operatorname{sen}^2x}\cos x+e^{\cos^2x}\operatorname{sen}x$; (b) $g'(x)=\frac{2\operatorname{sen}4x-\operatorname{sen}x}{2\sqrt{x}}$; (c) $g'(x)=\frac{3x^2}{1+x^{12}}-\frac{\cos x}{1+\operatorname{sen}^4x}$; **(22)** 0; **(23)**

$\pi/2$; **(26)** (a) $62/5$; (b) $12\sqrt{511}$.

Parte 4

✰ Integrais impróprias

1. Decida quais integrais impróprias abaixo são convergentes e tente calcular seu valor. Dentre as convergentes, tente determinar aquelas que são absolutamente convergentes.

(1) $\displaystyle\int_1^{\infty}\frac{dx}{x^{\alpha}},\ \alpha>0$ (2) $\displaystyle\int_0^{1}\frac{dx}{x^{\alpha}},\ \alpha>0$ (3) $\displaystyle\int_1^{\infty}\ln x\,dx$

(4) $\displaystyle\int_0^{1}\ln x\,dx$ (5) $\displaystyle\int_1^{\infty}\frac{\operatorname{sen}x}{x^{\alpha}}dx,\ \alpha>0$ (6) $\displaystyle\int_1^{\infty}\frac{\cos x}{x^{\alpha}}dx,\ \alpha>0$

(7) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\operatorname{sen}(x^2)dx$ (8) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\cos(x^2)dx$ (9) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\operatorname{sen}(x^{\alpha})dx,\ \alpha>0$

(10) $\displaystyle\int_0^{\infty}x^{\alpha}e^{-\beta x}dx,\ \alpha,\beta>0$ (11) $\displaystyle\int_0^{\infty}e^{-x}\operatorname{sen}x\,dx$ (12) $\displaystyle\int_0^{\infty}e^{-x}\ln x\,dx$

(13) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{1+x^2}$ (14) $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{x^5+3x^2-7}{x^6+3x^2+3}dx$ (15) $\displaystyle\int_1^{\infty}\frac{x\sqrt{x}+\operatorname{sen}x}{x^3+5\ln x}dx$

(16) $\displaystyle\int_0^{\infty}e^{-\alpha x}dx,\ \alpha>0$ (17) $\displaystyle\int_0^{1}\frac{\ln x}{x^{\alpha}}dx,\ \alpha>0$ (18) $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{x^{\alpha}}{1+x^{\beta}}dx,\ \alpha,\beta>0$

(19) $\displaystyle\int_0^{1}\frac{dx}{\sqrt{x+x^2}}$ (20) $\displaystyle\int_0^{1}\frac{dx}{\sqrt{x-x^2}}$ (21) $\displaystyle\int_2^{\infty}\frac{dx}{x(\ln x)^{\alpha}},\ \alpha>0$

(22) $\displaystyle\int_0^{\infty}x^{\alpha}e^{-x^{\beta}}dx,\ \alpha,\beta>0$ (23) $\displaystyle\int_0^{\infty}e^{-x}\operatorname{sen}(1/x)dx$ (24) $\displaystyle\int_1^{\infty}\frac{\operatorname{sen}^2x}{x^2}dx$

(25) $\displaystyle\int_1^{\infty}\frac{\operatorname{sen}(x^{\alpha})}{x^{\beta}},\ \alpha,\beta>0$ (26) $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{\sqrt{x^2+2012}}{\sqrt[3]{x^7+3x^3+2}}dx$ (27) $\displaystyle\int_0^{1}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

(28) $\displaystyle\int_2^{\infty}\frac{dx}{x^{\alpha}\ln x},\ \alpha>0$ (29) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{x^{\alpha-1}}{e^x-1}dx,\ \alpha>0$ (30) $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{xe^{-x}}{\sqrt{x^5+7x^4+11}}dx$

(31) $\displaystyle\int_0^{1}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx$ (32) $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{x\operatorname{sen}x}{1+x^3}dx$ (33) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos(x^2-1)e^{-x^2}}{x^4+x^2+7}dx$

2. Calcule a derivada das seguintes funções:

(1) $\displaystyle f(x)=\int_x^{x^2}t\operatorname{sen}(2t-1)dt$ (2) $\displaystyle f(x)=\int_{x^2}^{x^3}t^{1/2}e^t dt$ (3) $\displaystyle f(x)=\int_{3-2x^2}^{\ln x}\cos(t^2)dt$

(4) $\displaystyle f(x)=\int_0^{5\operatorname{sen}x}\frac{e^{3t^2}}{t^2+1}dt$ (5) $\displaystyle f(x)=\int_0^{x}(x-t)e^{-t^2}dt$ (6) $\displaystyle f(x)=\int_x^{x^2+7}(x+t)\operatorname{sen}t\,dt$

(7) $\displaystyle f(x)=\int_{-\infty}^{\operatorname{sen}x}e^{-t^2}dt$ (8) $\displaystyle f(x)=\int_{-\infty}^{e^x}\frac{3-2t^4}{1+t^8}dt$ (9) $\displaystyle f(x)=\int_{x^2}^{\infty}e^{-t}\ln t\,dt$

(10) $\displaystyle f(x)=\int_{\cos x}^{\operatorname{sen}x}e^{t^2}dt$ (11) $\displaystyle f(x)=\int_{\sqrt{x}}^{2\sqrt{x}}\operatorname{sen}(t^2)dt$ (12) $\displaystyle g(x)=\int_{\operatorname{sen}x}^{x^3}\frac{dt}{1+t^4}$

3. Esboce o gráfico das funções abaixo:

(1) $\displaystyle f(x)=\int_0^{x}e^{-t^2}dt$ (2) $\displaystyle f(x)=\int_0^{x}\frac{\operatorname{sen}t}{t}dt$ (3) $\displaystyle f(x)=\int_0^{x}\frac{dt}{te^t}$

4. Seja f uma função contínua em um intervalo I contendo a origem e seja

$$y = y(x) = \int_0^x \operatorname{sen}(x-t) f(t)\, dt$$

Prove que $y'' + y = f(x)$ e $y(0) = y'(0) = 0$, para todo $x \in I$.

5. Calcule $\lim_{x\to 0} \dfrac{\int_0^{x^2} \cos(t^2)\, dt}{\int_0^x e^{-t^2}\, dt}$.

6. Mostre que $f(x) = \displaystyle\int_0^{1/x} \frac{1}{t^2+1}\, dt + \int_0^x \frac{1}{t^2+1}\, dt$ é constante em $(0,\infty)$. Qual o valor dessa constante?

7. Seja $f(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{1}{\sqrt{1+t^4}}\, dt$, $x \in \mathbb{R}$.

   (a) Mostre que f é crescente e ímpar.

   (b) Mostre que $f(x) \le f(1) + 1 - \dfrac{1}{x}$, $\forall x \ge 1$. (Sugestão: Integre $0 \le \frac{1}{\sqrt{1+t^4}} \le \frac{1}{t^2}$ de 1 a x.)

   (c) Mostre que $\lim_{x\to\infty} f(x)$ existe e é um número real positivo.

   (d) Esboce o gráfico de $f(x)$, localizando seu ponto de inflexão.

8. Seja $f(x) = \displaystyle\int_0^x e^{\frac{x^2-t^2}{2}}\, dt$. Mostre que $f'(x) - xf(x) = 1$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

9. Seja $F : [1,+\infty[\to \mathbb{R}$ dada por $F(x) = \displaystyle\int_1^x \sqrt{t^3-1}\, dt$.

   (a) Calcule o comprimento do gráfico de F entre $x = 1$ e $x = 4$.

   (b) Calcule $\lim_{x\to 2} \dfrac{F(x^3) - F(8)}{\operatorname{sen}(x-2)}$

10. (Função Gamma) A função Gamma é definida por

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt,$$

para $x > 0$.

   (a) Mostre que Γ é bem-definida, i.e., que a integral acima é convergente para todo $x > 0$.

   (b) Use integração por partes para mostrar que $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$, para todo $x > 0$.

   (c) Use indução em n para mostrar que $\Gamma(n) = (n-1)!$ para todo inteiro $n > 0$. Isso mostra que a função Γ é uma extensão da função fatorial para todos os reais positivos.

   (d) Use o ítem (2) para definir Γ em toda a reta, exceto nos inteiros não-positivos.

11. (Transformada de Laplace) Dada $f : (0,+\infty) \to \mathbb{R}$, a *transformada de Laplace de f* é definida como

$$\mathscr{L} f(x) = \int_0^\infty e^{-tx} f(t) dt,$$

para $x > 0$. A transformada de Laplace é uma ferramenta muito útil para resolver certas equações diferenciais.

(a) Dizemos que f é de *crescimento exponencial* se existem $\alpha, a, M > 0$ tais que $|f(t)| \leq Me^{\alpha t}$ para todo $t > a$. Mostre que se f é de crescimento exponencial então $\mathscr{L}f$ é bem-definida (i.e., a integral converge) para todo $x > 0$.

(b) Mostre que se f é de crescimento exponencial e diferenciável então $\mathscr{L}(f')(x) = x\mathscr{L}f(x) - f(0)$. Encontre uma fórmula semelhante para $\mathscr{L}(f'')$

(c) Seja H_α a função que vale 1 se $t \geq \alpha$ e zero se $0 < t < \alpha$. Calcule $\mathscr{L}H_\alpha(x)$

(d) Verifique as seguintes igualdades:

(1) $\mathscr{L}(1) = 1/x$	(2) $\mathscr{L}(e^{\alpha}t) = (x-\alpha)^{-1}$, $x > \alpha$	(3) $\mathscr{L}(t^n) = n!x^{-n-1}$, $n \in \mathbb{N}$
(4) $\mathscr{L}(t^\alpha) = \Gamma(\alpha+1)x^{-\alpha-1}$	(5) $\mathscr{L}(\mathrm{sen}\,(\alpha t)) = \frac{\alpha}{x^2+\alpha^2}$	(6) $\mathscr{L}(\sinh(\alpha t)) = \frac{\alpha}{x^2-\alpha^2}$, $x > \lvert\alpha\rvert$
(7) $\mathscr{L}(\cos(\alpha t)) = \frac{x}{x^2+\alpha^2}$	(8) $\mathscr{L}(\cosh(\alpha t)) = \frac{x}{x^2-\alpha^2}$, $x > \lvert\alpha\rvert$	(9) $\mathscr{L}(t^n e^{\alpha}t) = n!(x-\alpha)^{-n-1}$, $n \in \mathbb{N}$

12. (Função Erro) A função *Erro* é definida por

$$\mathrm{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-t^2}\,dt,\ \ x \in \mathbb{R}.$$

(a) Mostre que a função erf é bem-definida, i.e., a integral acima converge.

(b) Esboce o gráfico da função erro.

(c) Pode-se provar que $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\,dt = \sqrt{\pi}$. Use este fato e a mudança de variável $t^2 = u$ para mostrar que $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$.

13. (Função seno integral) A função *Seno integral* é definida como

$$\mathrm{Si}(x) = \int_0^x \frac{\mathrm{sen}\,t}{t}\,dt$$

(a) Mostre que a função Si é bem-definida, i.e., a integral acima converge.

(b) Esboce o gráfico de Si. (Pode-se provar que $\lim_{x\to\infty}\mathrm{Si}(x) = \pi/2$; você pode usar este fato.)

✰ Polinômio de Taylor

14. Calcule o polinômio de Taylor de f de grau n no ponto x_0 indicado:

(1) $f(x) = e^x$, $x_0 = 0$	(2) $f(x) = e^x$, $x_0 = 1$	(3) $f(x) = \mathrm{sen}\,x$, $x_0 = 0$
(4) $f(x) = \cos x$, $x_0 = 0$	(5) $f(x) = \cos x$, $x_0 = -1$	(6) $f(x) = \mathrm{arctg}\,x$, $x_0 = 0$
(7) $f(x) = \ln(1+x)$, $x_0 = 0$	(8) $f(x) = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$, $x_0 = 0$	(9) $f(x) = x^3 + 2x^2 - 5x + 3$, $x_0 = 1$
(10) $f(x) = \sinh x$, $x_0 = 0$	(11) $f(x) = \cosh x$, $x_0 = 0$	(12) $f(x) = \frac{1}{1-x}$, $x_0 = 0$
(13) $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$, $x_0 = 0$	(14) $f(x) = x\ln(1+x)$, $x_0 = 0$	(15) $f(x) = \cos^2 x$, $x_0 = 0$

15. Use o polinômio de Taylor de ordem 2 e a fórmula de Taylor com resto de Lagrange para calcular um valor aproximado para cada um dos números abaixo, estimando o erro:

(a) $\ln(1,01)$	(b) $\mathrm{sen}\,(-0,01)$	(c) $\mathrm{tg}\,(-0,1)$	(d) $\sqrt[4]{16,1}$	(e) $\sqrt{8,97}$
(f) $\cos(\frac{\pi}{2} + 0,05)$	(g) $e^{0,07}$	(h) $\mathrm{arctg}\,(0,09)$	(i) $\ln(1,001)$	(j) $\cosh(-0,1)$

16. Use a fómula de Taylor com resto de Lagrange para mostrar as igualdades abaixo:

(a) $e^x = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} \frac{x^n}{n!}$, $x \in \mathbb{R}$

(b) $\operatorname{sen} x = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$, $x \in \mathbb{R}$

(c) $\cos x = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$, $x \in \mathbb{R}$

(d) $\ln(1+x) = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n$, $|x| < 1$

(e) $\operatorname{arctg} x = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$, $|x| \le 1$

(f) $\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \lim_{N\to\infty} 2 \sum_{n=0}^{N} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$, $|x| < 1$

17. Utilizando o exercício anterior, obtenha um valor aproximado de:

(a) e, com erro inferior a 10^{-5}

(b) $\operatorname{sen} 1$, com erro inferior a 10^{-7}

(c) $\cos 1$, com erro inferior a 10^{-5}

(d) $\ln 2$ e $\ln 3$, com erro inferior a 10^{-5}

(e) e^2, com erro inferior a 10^{-5}

(f) $\operatorname{arctg}(1/2)$ e $\operatorname{arctg}(1/3)$, com erro inferior a 10^{-5}

(g) $\pi/4$, com[1] erro inferior a 10^{-5}

(h) $\cos(1/2)$, com erro inferior a 10^{-5}

18. Calcule $\frac{d^{320}\operatorname{arctg}}{dx^{320}}(0)$ e $\frac{d^{321}\operatorname{arctg}}{dx^{321}}(0)$

19. Estime as integrais abaixo:

(a) $\displaystyle\int_0^1 \operatorname{sen}(t^2)\,dt$, com erro inferior a 10^{-5}

(b) $\displaystyle\int_0^1 e^{t^3}\,dt$, com erro inferior a 10^{-7}

(c) $\displaystyle\int_0^1 \ln(1+t^4)\,dt$, com erro inferior a 10^{-2}

(d) $\displaystyle\int_0^1 e^{-t^2}\,dt$, com erro inferior a 10^{-7}

(e) $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{\operatorname{sen} t}{t}\,dt$, com erro inferior a 10^{-6}

(d) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1-\cos(t^2)}{t}\,dt$, com erro inferior a 10^{-7}

20. Utilizando os polinômios de Taylor das funções envolvidas, calcule os seguintes limites:

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x}$

(b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2}$

(c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x-\operatorname{sen} x}{x^3}$

(d) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x}$

(e) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)-\ln(1-x)}{x}$

(f) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x}$

(g) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^3}-1}{x^2}$

(h) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x}$

(i) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x - \left(x - \frac{x^3}{3!}\right)}{x^5}$

(j) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^x - \left(1 + x + \frac{x^2}{2}\right)}{x^3}$

✰ **Respostas**

(1)

	CA*	C**	Valor	D**
1	$\alpha > 1$		$(\alpha-1)^{-1}$	$\alpha \leq 1$
2	$\alpha < 1$		$(1-\alpha)^{-1}$	$\alpha \geq 1$
3				x
4	x		-1	
5	$\alpha > 1$	$\alpha > 0$		
6	$\alpha > 1$	$\alpha > 0$		
7		x		
8		x		
9		x		
10	x			
11	x		$1/2$	
12	x			

	CA*	C**	Valor	D**
13	x		$\pi/2$	
14				x
15				x
16	x		α^{-1}	
17	$\alpha < 1$		$\alpha \geq 1$	
18	$\beta > \alpha + 1$			$\beta \leq \alpha + 1$
19	x			
20	x			
21	$\alpha > 1$			$0 \leq \alpha \leq 1$
22	x			
23	x			
24	x			
25	$\beta > 1$	$\beta \leq 1$		
26	x			
27	x		$\pi/2$	
28	$\alpha > 1$			$\alpha \leq 1$
29	x			
30	x			
31	x		1	
32	x			
33	x			

(Legenda: CA - Converge absolutamente; C-Converge; D-diverge)

(14)

(1) $p_n(x) = 1 + x + x^2/2! + \ldots + x^n/n!$;
(2) $p_n(x) = e + e(x-1) + e(x-1)^2/2! + \ldots + e(x-1)^n/n!$;
(3) $p_{2k+1}(x) = x - x^3/3! + (-1)^k x^{2k+1}/(2k+1)!$;
(4) $p_{2k}(x) = 1 - x^2/2! + (-1)^k x^{2k}/(2k)!$;
(5) $p_n(x) = \cos 1 - \operatorname{sen} 1(x-1) + \cos 1(x-1)^2/2! - \operatorname{sen} 1(x-1)^3/3! + \ldots + f^{(n)}(1)(x-1)^n/n!$;
(6) $p_{2k+1}(x) = x - x^3/3 + x^5/5 + \ldots + (-1)^k x^{2k+1}/(2k+1)$;
(7) $p_n(x) = x - x^2/2 + x^3/3 - \ldots + (-1)^n x^n/n$;
(8) $p_{2k+1}(x) = 2x + 2x^3/3 + \ldots + 2x^{2k+1}/(2k+1)$;
(9) $p_n(x) = p_3(x) = 1 + 2(x-1) + 5(x-1)^2 + (x-1)^3$ para todo $n \geq 3$;
(10) $p_{2k+1}(x) = x + x^3/3! + \ldots + x^{2k+1}/(2k+1)!$;
(11) $p_{2k}(x) = 1 + x^2/2! + \ldots + x^{2k}/(2k)!$;
(12) $p_n(x) = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n$;
(13) $p_{2k}(x) = 1 - x^2 + x^4 + \ldots + (-1)^k x^{2k}$;
(14) $p_{n+1}(x) = x^2 - x^3/2 + x^4/3 - \ldots + (-1)^n x^{n+1}/n$;
(15) $p_{2k}(x) = 1 + x + \ldots + 2^{2k-1} x^{2k}/(2k)!$