

GABARITO DA PRIMEIRA PROVA - TIPO A - 30/03/2012

Questão 1 (3 pontos) Calcule, se existirem, os seguintes limites:

$$(a) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - \sqrt{x}}{\operatorname{sen}(x^2 - 1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - \sqrt{x}}{\operatorname{sen}(x^2 - 1)} \frac{x + \sqrt{x}}{x + \sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{\operatorname{sen}(x^2 - 1)} \frac{x}{(x + 1)(x + \sqrt{x})} = \frac{1}{4}$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6x + \sqrt[3]{x} \operatorname{sen}(2x^2) + 2012}{3x + x \sqrt{x} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6 + \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} \operatorname{sen}(2x^2) + \frac{2012}{x}}{3 + \frac{\operatorname{sen}(1/\sqrt{x})}{1/\sqrt{x}}} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

$$(c) \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^6 + 3x^3 + 1} - x^3 = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^6 + 3x^3 + 1} - x^3) \frac{\sqrt{x^6 + 3x^3 + 1} + x^3}{\sqrt{x^6 + 3x^3 + 1} + x^3}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^3 + 1}{\sqrt{x^6 + 3x^3 + 1} + x^3}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3 + \frac{1}{x^3}}{\sqrt{1 + \frac{3}{x^3} + \frac{1}{x^6}} + 1} = \frac{3}{2}$$

Questão 2 (2 pontos) Determine o conjunto dos pontos nos quais a função

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1 - \cos(x^2)}{\sqrt{x^6 + x^8}} & , \text{ se } x \neq 0 \\ 0 & , \text{ se } x = 0 \end{cases}$$

é diferenciável.

Solução. A função f é diferenciável em qualquer ponto distinto de $x = 0$, pois é quociente de composições de funções diferenciáveis. Vejamos em $x = 0$:

$$\frac{f(x) - f(0)}{x} = \frac{1 - \cos(x^2)}{x \sqrt{x^6(1 + x^2)}}$$

$$= \frac{1 - \cos(x^2)}{x|x^3| \sqrt{1 + x^2}}$$

$$= \frac{1 - \cos(x^2)}{x^4} \frac{x^3}{|x|^3} \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$$

A primeira parcela do produto acima tem limite $1/2$ (basta multiplicar numerador e denominador por $1 + \cos(x^2)$; fizemos isto em aula) e a última parcela tem limite 1. A expressão acima tem limite $1/2$ quando $x \rightarrow 0^+$ e $-1/2$ quando $x \rightarrow 0^-$. Logo, não existe $f'(0)$. Portanto, f é diferenciável em $\{x \in \mathbb{R} : x \neq 0\}$. ■

Questão 3 (3 pontos) Considere a função

$$f(x) = \frac{\text{sen}(\text{tg}(x^2)) + \sqrt{x+4}}{1+x^2}.$$

(a) Determine $f'(x)$.

Solução.

$$f'(x) = \frac{(1+x^2) \left(\cos(\text{tg}(x^2)) \sec^2(x^2) \cdot 2x + \frac{1}{2\sqrt{x+4}} \right) + (\text{sen}(\text{tg}(x^2)) + \sqrt{x+4}) (2x)}{(1+x^2)^2}$$

■

(b) Determine a reta tangente ao gráfico de

$$g(x) = \text{sen}^2(f(x) - 2) + 4f(x)^2$$

no ponto $(0, g(0))$.

Solução. Substituindo $x = 0$ na expressão acima, temos $f'(0) = 1/4$. Além disso,

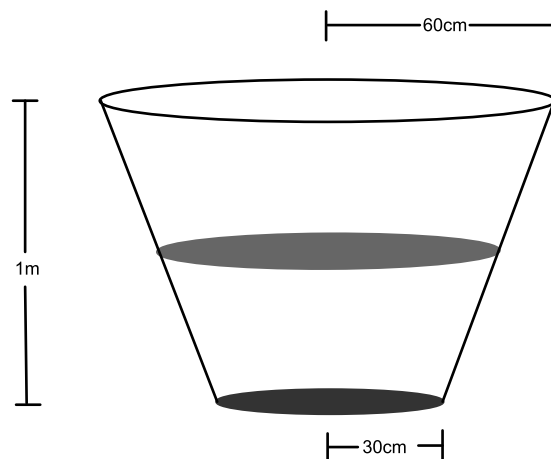
$$g'(x) = 2 \cos(f(x) - 2) f'(x) + 8f(x) f'(x),$$

logo, como $f(0) = 2$, temos $g'(0) = 9/2$. Assim, a reta tangente ao gráfico de g no ponto $(0, g(0))$ é

$$y - 16 = \frac{9}{2}(x - 0).$$

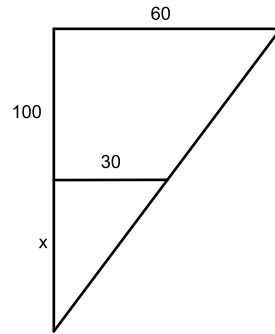
■

Questão 4 (2 pontos) A figura a seguir ilustra um tanque de armazenamento sendo preenchido com água.



O formato do tanque é de um tronco de cone circular reto de altura 1m, cujos raios das bases medem 60cm e 30cm, respectivamente. Assumindo que em um dado instante a vazão da água seja $300\text{cm}^3/\text{min}$ e a altura da água no tanque seja 20cm, calcule a taxa de variação com que cresce a altura da água dentro do tanque nesta instante.

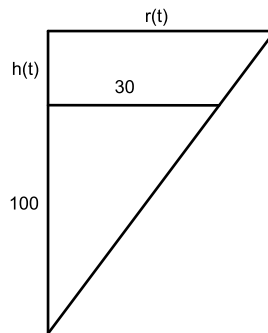
Solução. Prolongando as faces do cone e fazendo um corte vertical no tanque, obtemos a figura abaixo:



Por semelhança, $x = 100\text{cm}$. Para um instante t qualquer, chamemos de $h(t)$ a altura da água, $r(t)$ o raio da circunferência formada pela superfície da água e $V(t)$ o volume de água dentro do tanque, medidos em cm, cm e cm^3 . Portanto,

$$V(t) = \frac{\pi}{3} r(t)^2 (100 + h(t)) - \frac{\pi}{3} 30^2 \cdot 100.$$

Olhando para o triângulo,



concluimos, novamente por semelhança, que $\frac{100}{30} = \frac{100+h(t)}{r(t)}$, logo, $r(t) = 30 + \frac{3h(t)}{10}$, de onde se conclui que

$$V(t) = \frac{\pi}{3} \left(30 + \frac{3h(t)}{10} \right)^2 (100 + h(t)) - \frac{\pi}{3} 30^2 \cdot 100.$$

Derivando a expressão acima, temos

$$V'(t) = \frac{\pi}{3} \left(2 \left(30 + \frac{3h(t)}{10} \right) \frac{3h'(t)}{10} (100 + h(t)) + \left(30 + \frac{3h(t)}{10} \right)^2 h'(t) \right).$$

Substituindo no instante t_0 procurado, obtemos $h'(t_0) = \frac{1}{36\pi} \text{cm/min} \approx 0,008\text{cm/min}$. ■