UFPR - Universidade Federal do Paraná
Departamento de Matemática
CM041 - Cálculo I - Turma C (Eng. Mecânica)
Prof. José Carlos Eidam

GABARITO DA PRIMEIRA PROVA - TIPO B - 30/03/2012

Questão 1 **(3 pontos)** Calcule, se existirem, os seguintes limites:

(a) $$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-x}{\operatorname{sen}(x^2-1)} = \lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-x}{\operatorname{sen}(x^2-1)}\frac{\sqrt{x}+x}{\sqrt{x}+x} = -\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{\operatorname{sen}(x^2-1)}\frac{x}{(x+1)(x+\sqrt{x})} = -\frac{1}{4}$$

(b) $$\lim_{x\to+\infty}\frac{8x+\sqrt[3]{x}\operatorname{sen}(7x^4)+2012}{4x+3x\sqrt{x}\operatorname{sen}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)} = \lim_{x\to+\infty}\frac{8+\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\operatorname{sen}(7x^4)+\frac{2012}{x}}{4+3\frac{\operatorname{sen}(1/\sqrt{x})}{1/\sqrt{x}}} = \frac{8}{7}$$

(c) $$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^6+2x^3+1}-x^3 &= \lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^6+2x^3+1}-x^3)\frac{\sqrt{x^6+2x^3+1}+x^3}{\sqrt{x^6+2x^3+1}+x^3}\\ &= \lim_{x\to+\infty}\frac{2x^3+1}{\sqrt{x^6+2x^3+1}+x^3}\\ &= \lim_{x\to+\infty}\frac{2+\frac{1}{x^3}}{\sqrt{1+\frac{2}{x^3}+\frac{1}{x^3}}+1} = \frac{2}{2} = 1\end{aligned}$$

Questão 2 **(2 pontos)** Determine o conjunto dos pontos nos quais a função

$$f(x) = \begin{cases}\frac{1-\cos(x^2)}{\sqrt{x^6+2x^8}} & \text{, se } x \neq 0\\ 0 & \text{, se } x = 0\end{cases}$$

é diferenciável.

Solução. A função f é diferenciável em qualquer ponto distinto de $x = 0$, pois é quociente de composições de funções diferenciáveis. Vejamos em $x = 0$:

$$\begin{aligned}\frac{f(x)-f(0)}{x} &= \frac{1-\cos(x^2)}{x\sqrt{x^6(1+2x^2)}}\\ &= \frac{1-\cos(x^2)}{x|x^3|\sqrt{1+2x^2}}\\ &= \frac{1-\cos(x^2)}{x^4}\frac{x^3}{|x|^3}\frac{1}{\sqrt{1+2x^2}}\end{aligned}$$

A primeira parcela do produto acima tem limite $1/2$ (basta multiplicar numerador e denominador por $1+\cos(x^2)$; fizemos isto em aula) e a última parcela tem limite 1. A expressão acima tem limite $1/2$ quando $x \to 0^+$ e $-1/2$ quando $x \to 0^-$. Logo, não existe $f'(0)$. Portanto, f é diferenciável em $\{x \in \mathbb{R} : x \neq 0\}$. ∎

Questão 3 **(3 pontos)** Considere a função

$$f(x) = \frac{\operatorname{sen}(\operatorname{tg}(x^2)) + \sqrt{x+9}}{1+x^2}.$$

(a) Determine $f'(x)$.

Solução.

$$f(x) = \frac{(1+x^2)\left(\cos(\operatorname{tg}(x^2))\sec^2(x^2)\cdot 2x + \frac{1}{2\sqrt{x+9}}\right) + \left(\operatorname{sen}(\operatorname{tg}(x^2)) + \sqrt{x+9}\right)(2x)}{(1+x^2)^2}$$

$\blacksquare$

(b) Determine a reta tangente ao gráfico de

$$g(x) = \operatorname{sen}^2(f(x)-3) + 4f(x)^2$$

no ponto $(0, g(0))$.

Solução. Substituindo $x = 0$ na expressão acima, temos $f'(0) = 1/6$. Além disso,

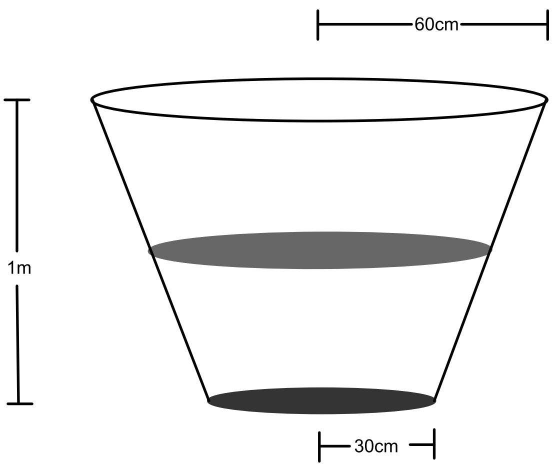
$$g'(x) = 2\cos(f(x)-3)f'(x) + 8f(x)f'(x),$$

logo, como $f(0) = 3$, temos $g'(0) = 13/3$. Assim, a reta tangente ao gráfico de g no ponto $(0, g(0))$ é

$$y - 36 = \frac{13}{3}(x-0).$$

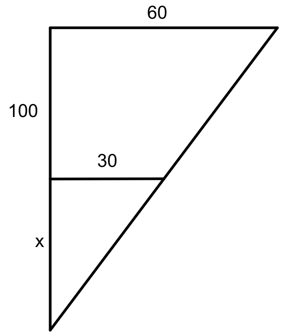
$\blacksquare$

Questão 4 **(2 pontos)** A figura a seguir ilustra um tanque de armazenamento sendo preenchido com água.



O formato do tanque é de um tronco de cone circular reto de altura 1m, cujos raios das bases medem 60cm e 30cm, respectivamente. Assumindo que em um dado instante a vazão da água seja $300\text{cm}^3/\text{min}$ e a altura da água no tanque seja 20cm, calcule a taxa de variação com que cresce a altura da água dentro do tanque nesta instante.

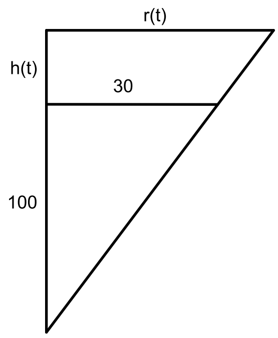
Solução. Prolongando as faces do cone e fazendo um corte vertical no tanque, obtemos a figura abaixo:



Por semelhança, $x = 100$cm. Para um instante t qualquer, chamemos de $h(t)$ a altura da água, $r(t)$ o raio da circunferência formada pela superfície da água e $V(t)$ o volume de água dentro do tanque, medidos em cm, cm e cm^3. Portanto,

$$V(t) = \frac{\pi}{3} r(t)^2 (100 + h(t)) - \frac{\pi}{3} 30^2 \cdot 100 \,.$$

Olhando para o triângulo,



concluímos, novamente por semelhança, que $\frac{100}{30} = \frac{100+h(t)}{r(t)}$, logo, $r(t) = 30 + \frac{3h(t)}{10}$, de onde se conclui que

$$V(t) = \frac{\pi}{3}\left(30 + \frac{3h(t)}{10}\right)^2 (100 + h(t)) - \frac{\pi}{3} 30^2 \cdot 100 \,.$$

Derivando a expressão acima, temos

$$V'(t) = \frac{\pi}{3}\left(2\left(30 + \frac{3h(t)}{10}\right)\frac{3h'(t)}{10}(100 + h(t)) + \left(30 + \frac{3h(t)}{10}\right)^2 h'(t)\right) .$$

Substituindo no instante t_0 procurado, obtemos $h'(t_0) = \frac{1}{36\pi}$cm/min $\approx 0{,}008$cm/min.

∎