UFPR - Universidade Federal do Paraná
Departamento de Matemática
CM041 - Cálculo I - Turma C (Eng. Mecânica)
Prof. José Carlos Eidam

GABARITO DA SEGUNDA PROVA - TIPO A - 27/04/2012

Questão 1 Calcule os limites abaixo:

1. **(1 ponto)** $\lim_{x\to 0^+}(e^{2x}+3x)^{1/x} = \lim_{x\to 0^+} e^{\frac{\ln(e^{2x}+3x)}{x}}$ e, aplicando L'Hospital,

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(e^{2x}+3x)}{x} = \lim_{x\to 0^+}\frac{2e^{2x}+3}{e^{2x}+3x} = 5\,,$$

   logo, por continuidade da função exponencial, o limite procurado é e^5.

2. **(1 ponto)** $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3x+1}{3x+4}\right)^{2x+5} = \lim_{x\to 0^+} e^{(2x+5)\ln\left(\frac{3x+1}{3x+4}\right)}$ e,

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty}(2x+5)\ln\left(\frac{3x+1}{3x+4}\right) &= \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(\frac{3x+1}{3x+4}\right)}{\frac{1}{2x+5}}\\
&= \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(3x+1)-\ln(3x+4)}{\frac{1}{2x+5}}\\
&= \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{3}{3x+1}-\frac{3}{3x+4}}{-\frac{2}{(2x+5)^2}}\,,\ \text{pela regra de L'Hospital,}\\
&= \lim_{x\to+\infty} -2\frac{(x+5/2)^2}{(x+1/3)(x+4/3)} = -2\,,
\end{aligned}$$

   portanto, o limite procurado é e^{-2}.

Questão 2 Seja $f(x) = xe^{-2x^2}$, $x\in\mathbb{R}$.

1. **(0,5 ponto)** Determine os intervalos de crescimento e decrescimento de f.

   Solução. Temos que $f'(x) = e^{-2x^2}(1-4x^2) = 4e^{-2x^2}(1/2-x)(1/2+x)$, logo, f é crescente em $(-1/2,1/2)$ e decrescente em $(-\infty,-1/2)\cup(1/2,+\infty)$. ∎

2. **(1 ponto)** Determine os pontos críticos de f e classifique-os.

   Solução. Os pontos críticos de f são $x_1 = 1/2$ e $x_2 = -1/2$. Como f' muda de sinal em x_1 e x_2, ambos são extremantes locais de f. Analisando o sinal de f', vemos que x_1 é ponto de mínimo local e x_2 máximo local. ∎

3. **(1 ponto)** Determine a concavidade do gráfico de f e os pontos de inflexão.

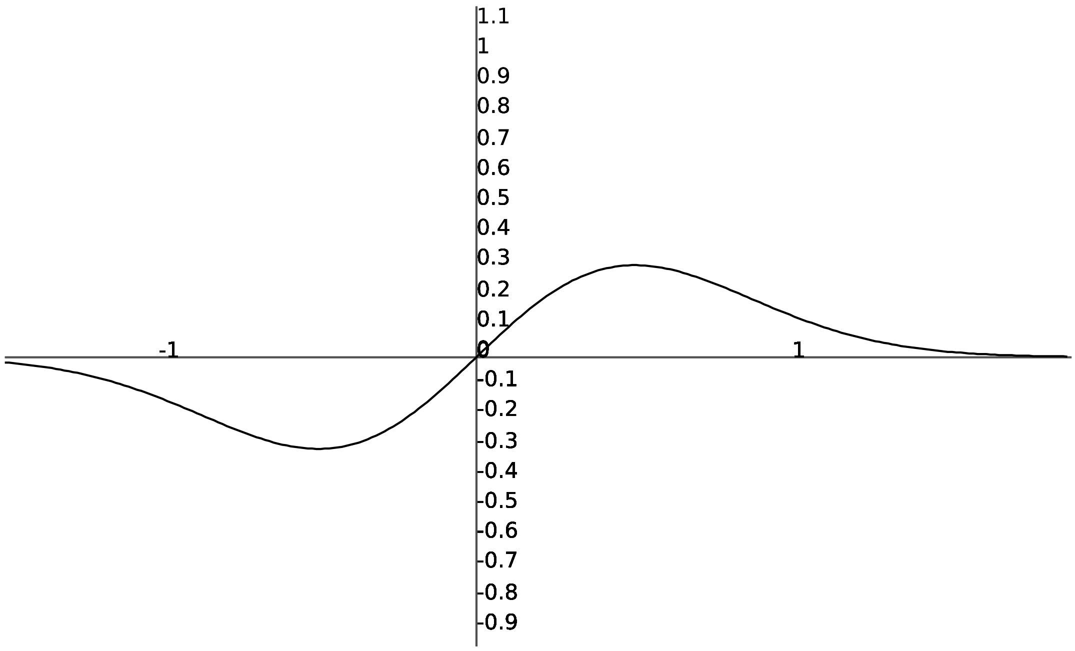
   Solução. Temos $f''(x) = 16xe^{-2x^2}(x^2 - 3/4) = 16xe^{-2x^2}(x - \sqrt{3}/2)(x + \sqrt{3}/2)$, logo a concavidade do gráfico de f é para cima em $(-\sqrt{3}/2, 0) \cup (\sqrt{3}/2, +\infty)$ e para baixo em $(-\infty, -\sqrt{3}/2) \cup (0, \sqrt{3}/2)$. Como f'' muda de sinal em $x_3 = -\sqrt{3}/2$ e $x_4 = \sqrt{3}/2$, ambos são pontos de inflexão. ∎

4. **(0,5 ponto)** Calcule $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ e $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

   Solução. Temos $\lim_{x\to+\infty} xe^{-2x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{e^{2x^2}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{4xe^{2x^2}} = 0$, por L'Hospital e $\lim_{x\to-\infty} xe^{-2x^2} = 0$, pelo mesmo motivo. ∎

5. **(1 ponto)** Determine os valores máximo e mínimo globais de f (se existirem) e esboce o gráfico de f.

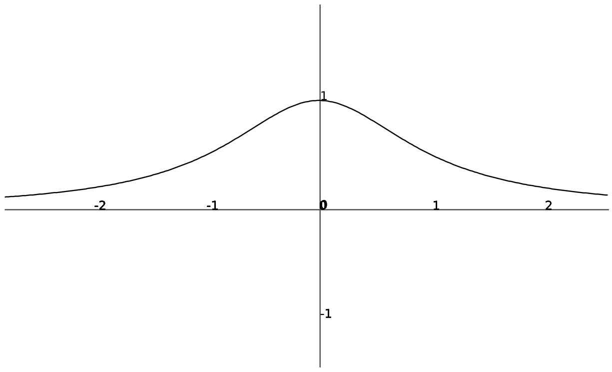
   Solução. Como f possui limite zero em $\pm\infty$ e somente dois pontos críticos, segue que x_1 é ponto de mínimo global e x_2 é ponto de máximo global. Temos $f(x_1) = (1/2)e^{-2(1/4)} = 1/\sqrt{2e}$ e $f(x_2) = -(1/2)e^{-2(1/4)} = -1/\sqrt{2e}$. O gráfico de f é



∎

Questão 3 **(2 pontos)** Dado um ponto (x, y) do primeiro quadrante sobre a curva $y = \dfrac{1}{1+x^2}$, considere o retângulo R de vértices $(x, y), (x, 0), (0, 0), (0, y)$. Determine x e y de forma que a área de R seja máxima.

Solução.



A área de R é $f(x) = x \cdot \frac{1}{1+x^2} = \frac{x}{1+x^2}$. Derivando f e igualando a zero, obtemos

$$\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2} = 0\,,$$

portanto, o ponto procurado é $x_1 = 1$. Como $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$, segue que x_1 é ponto de máximo local. Logo, as dimensões procuradas são $x = 1$ e $y = 1/2$. ∎

Questão 4 Considere a equação

$$xe^x = y \tag{1}$$

nas variáveis reais x e y.

(a) **(1 ponto)** Mostre dado qualquer $y > 0$, a equação (1) tem uma única solução $x > 0$. Sendo assim, fica definida uma função $W : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ que associa a cada $y > 0$ a única solução de (1), isto é, $W(y)e^{W(y)} = y$. A função W é chamada de *função de Lambert*.

Solução. A função $f(x) = xe^x$ tem derivada $f'(x) = (x+1)e^x$, a qual é positiva para $x > 0$. Logo, f é crescente em $(0, +\infty)$. Como $f(0) = 0$ e $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, segue, pelo teorema do valor intermediário, que a equação $f(x) = y$ tem solução única para cada $y > 0$. ∎

(b) **(2 pontos)** Mostre que $W(e) = 1$ e $1 < W(3) < 1,3$.

Solução. Como W é a inversa de f e $f(1) = e$, segue que $W(e) = 1$. Vemos que

$$f'(x) = (x+1)e^x \geq 1$$

para todo $x \geq 0$, logo, $W'(y) = \dfrac{1}{f'(x)} \leq 1$, se $f(x) = y$. Pelo teorema do valor médio, existe $c \in (e, 3)$ tal que $W(3) - 1 = W(3) - W(e) = W'(c)(3-e) \leq 3 - e < 0,3$. Como f é crescente, sua inversa W também o é, portanto, $1 < W(3) < 1 + 0,3 = 1,3$. ∎