UFPR - Universidade Federal do Paraná
Departamento de Matemática
CM041 - Cálculo I - Turma C (Eng. Mecânica)
Prof. José Carlos Eidam

GABARITO DA TERCEIRA PROVA - PROVA TIPO A - 23/05/2012

Questão 1 Calcule as integrais definidas abaixo (cada ítem vale **1 ponto**):

(a)

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{2}\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx &= \int_{2}^{5}\frac{du}{2\sqrt{u}},\text{ fazendo } u=1+x^2\\ &= \sqrt{u}\Big|_2^5\\ &= \sqrt{5}-\sqrt{2}\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}\int_{0}^{\pi/2}\text{sen}^3\theta d\theta &= \int_{0}^{\pi/2}\text{sen}^2\theta\text{sen}\theta d\theta\\ &= \int_{0}^{\pi/2}(1-\cos^2\theta)\text{sen}\theta d\theta\\ &= \int_0^1(1-u^2)du,\text{ fazendo } u=\cos\theta\\ &= u-\frac{u^3}{3}\Big|_0^1\\ &= \frac{2}{3}\end{aligned}$$

(c) $\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{x^2+1}{x^2+2x+5}dx$

Primeiramente, dividimos os polinômios e completamos o quadrado, obtendo

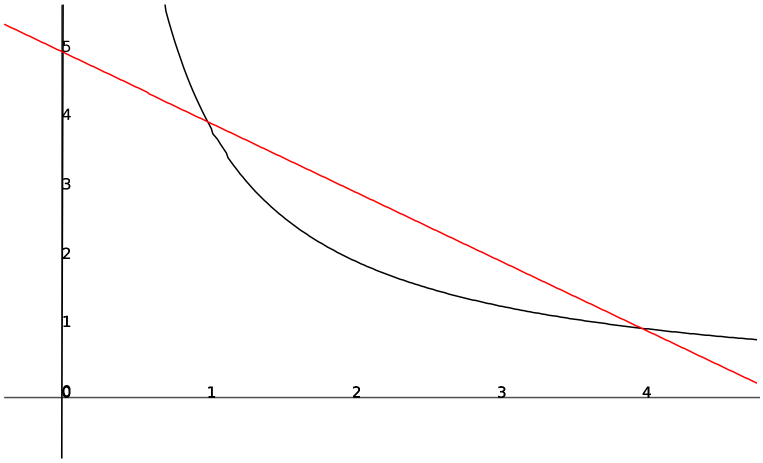
$$\frac{x^2+1}{x^2+2x+5}=1-2\frac{x+2}{(x+1)^2+4}=1-\frac{1}{2}\frac{x+2}{\left(\frac{x+1}{2}\right)^2+1},$$

portanto,

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1}\frac{x^2+1}{x^2+2x+5}dx &= \int_{-1}^{1}dx-\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\frac{x+2}{\left(\frac{x+1}{2}\right)^2+1}dx\\ &= 2-\int_0^1\frac{2y+1}{y^2+1}dy,\text{ fazendo } y=(x+1)/2,\\ &= 2-\int_0^1\frac{2y}{y^2+1}dy-\int_0^1\frac{dy}{y^2+1}\\ &= 2-\ln(y^2+1)\Big|_0^1-\arctan y\Big|_0^1\\ &= 2-\ln 2-\frac{\pi}{4}.\end{aligned}$$

Questão 2 **(2 pontos)** Determine o volume do sólido obtido por rotação em torno do eixo x da região R do primeiro quadrante delimitada pelas curvas $y = \dfrac{4}{x}$ e $x + y = 5$.

Solução. As duas curvas se intersectam em $x = 1$ e $x = 4$ e a região delimitada por ambas é esboçada abaixo:



O volume procurado é

$$\pi \int_1^4 \left\{ (5-x)^2 - \left(\frac{4}{x}\right)^2 \right\} dx = \pi \left[25x - 5x^2 + \frac{x^3}{3} + \frac{16}{x} \right]_1^4 = 9\pi$$

$\blacksquare$

Questão 3 Calcule as primitivas abaixo (cada ítem vale **1,5 ponto**):

(a)

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{(1+\sqrt[3]{x})^2} &= \int \frac{3(u-1)^2}{u^2} du, \text{ fazendo } 1+\sqrt[3]{x} = u,\ dx = 3(u-1)^2 du \\
&= 3 \int \left(1 - \frac{2}{u} + \frac{1}{u^2}\right) du \\
&= 3\left(u - 2\ln|u| - \frac{1}{u}\right) + C \\
&= 3\left(1 + \sqrt[3]{x} - 2\ln|1+\sqrt[3]{x}| - \frac{1}{1+\sqrt[3]{x}}\right) + C
\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{x^2\sqrt{1+x^2}} &= \int \frac{\sec^2\theta}{\tan^2\theta\sec\theta}d\theta\,,\ \text{fazendo } x=\tan\theta,\ dx=\sec^2\theta \\
&= \int \frac{\cos\theta}{\text{sen}^2\theta}d\theta \\
&= \int \frac{du}{u^2}\,,\ \text{fazendo } u=\text{sen}\theta \\
&= -\frac{1}{u}+C \\
&= -\text{cosec}\,\theta+C \\
&= -\sqrt{1+\cot^2\theta}+C \\
&= -\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+C=\sqrt{\frac{1+x^2}{x^2}}+C
\end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned}
\int \frac{\cos^3 x}{\text{sen}^4 x}dx &= \int \frac{1-\text{sen}^2 x}{\text{sen}^4 x}\cos x\,dx \\
&= \int \left(\frac{1}{\text{sen}^4 x}-\frac{1}{\text{sen}^2 x}\right)\cos x\,dx \\
&= -\frac{1}{3\text{sen}^3 x}+\frac{1}{\text{sen} x}+C
\end{aligned}$$

(d)

$$\begin{aligned}
\int x^3\ln(1+x^2)dx &= \frac{x^4}{4}\ln(1+x^2)-\int \frac{x^4}{4}\frac{2x}{1+x^2}dx,\ \text{integrando por partes} \\
&= \frac{x^4}{4}\ln(1+x^2)-\frac{1}{2}\int \frac{x^5}{1+x^2}dx \\
&= \frac{x^4}{4}\ln(1+x^2)-\frac{1}{2}\int \left\{(x^3-x)+\frac{x}{1+x^2}\right\}dx,\ \text{dividindo os polinômios} \\
&= \frac{x^4}{4}\ln(1+x^2)-\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{x^4}{4}-\frac{x^2}{2}\right)+\frac{1}{2}\ln(1+x^2)\right\}
\end{aligned}$$