

GABARITO DA TERCEIRA PROVA - PROVA TIPO B - 23/05/2012

Questão 1 Calcule as integrais definidas abaixo (cada item vale 1 ponto):

(a)

$$\begin{aligned}\int_{-1}^3 \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} dx &= \int_2^{10} \frac{du}{2\sqrt{u}}, \text{ fazendo } u = 1+x^2 \\ &= \sqrt{u} \Big|_2^{10} \\ &= \sqrt{10} - \sqrt{2}\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/2} \cos^3 \theta d\theta &= \int_0^{\pi/2} \cos^2 \theta \cos \theta d\theta \\ &= \int_0^{\pi/2} (1 - \sin^2 \theta) \cos \theta d\theta \\ &= \int_0^1 (1 - u^2) du, \text{ fazendo } u = \sin \theta \\ &= u - \frac{u^3}{3} \Big|_0^1 \\ &= \frac{2}{3}\end{aligned}$$

(c) $\int_{-1}^1 \frac{x^2 - 1}{x^2 + 2x + 5} dx$

Primeiramente, dividimos os polinômios e completamos o quadrado, obtendo

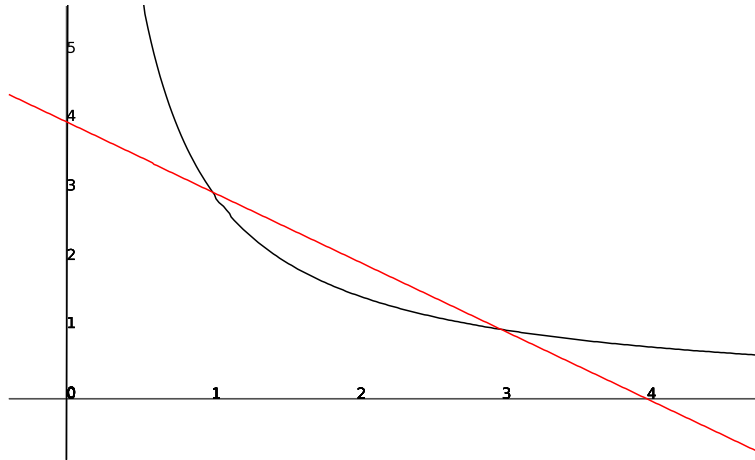
$$\frac{x^2 - 1}{x^2 + 2x + 5} = 1 - 2 \frac{x + 3}{(x + 1)^2 + 4} = 1 - \frac{1}{2} \frac{x + 3}{\left(\frac{x+1}{2}\right)^2 + 1},$$

portanto,

$$\begin{aligned}\int_{-1}^1 \frac{x^2 - 1}{x^2 + 2x + 5} dx &= \int_{-1}^1 dx - \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \frac{x + 3}{\left(\frac{x+1}{2}\right)^2 + 1} dx \\ &= 2 - \int_0^1 \frac{2y + 2}{y^2 + 1} dy, \text{ fazendo } y = (x + 1)/2, \\ &= 2 - \int_0^1 \frac{2y}{y^2 + 1} dy - 2 \int_0^1 \frac{dy}{y^2 + 1} \\ &= 2 - \ln(y^2 + 1) \Big|_0^1 - 2 \arctan y \Big|_0^1 \\ &= 2 - \ln 2 - \frac{\pi}{2}.\end{aligned}$$

Questão 2 (2 pontos) Determine o volume do sólido obtido por rotação em torno do eixo x da região R do primeiro quadrante delimitada pelas curvas $y = \frac{3}{x}$ e $x + y = 4$.

Solução. As duas curvas se intersectam em $x = 1$ e $x = 3$ e a região delimitada por ambas é esboçada abaixo:



O volume procurado é

$$\pi \int_1^3 \left\{ (4-x)^2 - \left(\frac{3}{x}\right)^2 \right\} dx = \pi \left[16x - 4x^2 + \frac{x^3}{3} + \frac{9}{x} \right]_1^3 = \frac{8\pi}{3}$$

Questão 3 Calcule as primitivas abaixo (cada ítem vale **1,5 ponto**):

(a)

$$\begin{aligned} \int \frac{\operatorname{sen}^3 x}{\cos^4 x} dx &= \int \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^4 x} \operatorname{sen} x dx \\ &= \int \left(\frac{1}{\cos^4 x} - \frac{1}{\cos^2 x} \right) \cos x dx \\ &= \frac{1}{3 \cos^3 x} - \frac{1}{\cos x} + C \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{(1 + \sqrt[3]{x})^2} &= \int \frac{3(u-1)^2}{u^2} du, \text{ fazendo } 1 + \sqrt[3]{x} = u, dx = 3(u-1)^2 du \\ &= 3 \int \left(1 - \frac{2}{u} + \frac{1}{u^2} \right) du \\ &= 3 \left(u - 2 \ln|u| - \frac{1}{u} \right) + C \\ &= 3 \left(1 + \sqrt[3]{x} - 2 \ln|1 + \sqrt[3]{x}| - \frac{1}{1 + \sqrt[3]{x}} \right) + C \end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned}\int x^3 \ln(1+x^2) dx &= \frac{x^4}{4} \ln(1+x^2) - \int \frac{x^4}{4} \frac{2x}{1+x^2} dx, \text{ integrando por partes} \\ &= \frac{x^4}{4} \ln(1+x^2) - \frac{1}{2} \int \frac{x^5}{1+x^2} dx \\ &= \frac{x^4}{4} \ln(1+x^2) - \frac{1}{2} \int \left\{ (x^3 - x) + \frac{x}{1+x^2} \right\} dx, \text{ dividindo os polinômios} \\ &= \frac{x^4}{4} \ln(1+x^2) - \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} \right) + \frac{1}{2} \ln(1+x^2) \right\}\end{aligned}$$

(d)

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{x^2 \sqrt{1+x^2}} &= \int \frac{\sec^2 \theta}{\tan^2 \theta \sec \theta} d\theta, \text{ fazendo } x = \tan \theta, dx = \sec^2 \theta \\ &= \int \frac{\cos \theta}{\sin^2 \theta} d\theta \\ &= \int \frac{du}{u^2}, \text{ fazendo } u = \sin \theta \\ &= -\frac{1}{u} + C \\ &= -\operatorname{cosec} \theta + C \\ &= -\sqrt{1 + \cot^2 \theta} + C \\ &= -\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} + C = \sqrt{\frac{1+x^2}{x^2}} + C\end{aligned}$$