UFPR - Universidade Federal do Paraná
Departamento de Matemática
CM041 - Cálculo I - Turma C (Eng. Mecânica)
Prof. José Carlos Eidam

GABARITO DA QUARTA PROVA - 22/06/2012

Questão 1 Calcule as integrais impróprias abaixo:

(a) **(1,5 ponto)** Integrando por partes duas vezes, obtemos

$$\int_0^\infty e^{-2x}\operatorname{sen}(3x)\,dx = \frac{3}{4} - \frac{9}{4}\int_0^\infty e^{-2x}\operatorname{sen}(3x)\,dx,$$

logo, $\displaystyle\int_0^\infty e^{-2x}\operatorname{sen}(3x)\,dx = \frac{3/4}{1+9/4} = \frac{3}{13}$.

(b) **(1,5 ponto)** Chamando $u' = 1/\sqrt{x}$, $v = \ln x$ e integrando por partes, temos

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\,dx &= \left[\frac{x^{1/2}}{1/2}\ln x\right]_{x\to 0^+}^{x=1} - \int_0^1 \frac{x^{1/2}}{1/2}\frac{1}{x}\,dx \\
&= 0 - 2\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} \\
&= -2\left[2\sqrt{x}\right]_{x=0}^{x=1} \\
&= -4.
\end{aligned}$$

Questão 2 **(2 pontos)** Classifique as integrais impróprias abaixo em convergentes ou divergentes:

(a) **(2 pontos)** $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x^2\operatorname{sen}(x^4)\,dx$

Solução. Como o integrando é uma função par, temos que a integral acima converge se e só $\displaystyle\int_0^\infty x^2\operatorname{sen}(x^4)\,dx$ converge. Esta última pode ser escrita como

$$\int_0^\infty x^2\operatorname{sen}(x^4)\,dx = \int_0^1 x^2\operatorname{sen}(x^4)\,dx + \int_1^\infty x^2\operatorname{sen}(x^4)\,dx$$

A primeira integral não é imprópria pois o integrando é contínuo e o intervalo é limitado, portanto, a mesma existe (converge). Analisemos a segunda integral acima: fazendo a mudança de variável $u = x^4$, temos $du = 4x^3\,dx$, portanto, $dx = \dfrac{du}{4u^{3/4}}$, logo,

$$\int_1^\infty x^2\operatorname{sen}(x^4)\,dx = \int_1^\infty u^{2/4}\operatorname{sen}u\frac{du}{4u^{3/4}} = \int_1^\infty \frac{\operatorname{sen}u}{u^{1/4}}\,du.$$

Esta última integral converge, como pode ser visto via integração por partes:

$$\int_1^\infty \frac{\operatorname{sen}u}{u^{1/4}}\,du = \left[\frac{-\cos u}{u^{1/4}}\right]_{u=1}^{u\to\infty} - \frac{1}{4}\int_1^\infty \frac{\cos u}{u^{5/4}}\,du = \cos 1 - \frac{1}{4}\int_1^\infty \frac{\cos u}{u^{5/4}}\,du$$

A integral acima converge, por comparação com $\frac{1}{u^{5/4}}$. Sendo assim, a integral é **convergente**. ∎

(b) **(1,5 ponto)** $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{x^5+4x^3\sqrt{x}+\ln x}{x^6-\operatorname{sen} x+1}\,dx$

Solução. Seja $f(x)$ o integrando da integral acima e $g(x)=1/x$, para $x>1$. Temos que

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^6+4x^4\sqrt{x}+x\ln x}{x^6-\operatorname{sen} x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{4\sqrt{x}}{x^2}+\frac{\ln x}{x^5}}{1-\frac{\operatorname{sen} x}{x^6}+\frac{1}{x^6}}=1\,,$$

logo, como $\int_1^{\infty}\frac{dx}{x}$ é divergente, segue que a integral dada é **divergente**.

$\blacksquare$

Questão 3 Utilizando polinômios de Taylor, determine uma aproximação para cada um dos números abaixo:

(a) **(1,5 ponto)** $\sqrt[3]{e}$, com erro inferior a 10^{-5}

Solução. Pela fórmula de Taylor com resto de Lagrange, temos $e^x=1+x+x^2/2!+\ldots+x^n/n!+e^c x^{n+1}/(n+1)!$, onde c está entre 0 e x. Logo, fazendo $x=1/3$, temos

$$\sqrt[3]{e}=e^{1/3}=1+\frac{1}{3}+\frac{(1/3)^2}{2!}+\ldots+\frac{(1/3)^n}{n!}+\frac{e^c(1/3)^{n+1}}{(n+1)!}\,.$$

Devemos escolher n tal que $\dfrac{e^c(1/3)^{n+1}}{(n+1)!}\le\dfrac{3(1/3)^{n+1}}{(n+1)!}=\dfrac{1}{3^n(n+1)!}<10^{-5}$. O menor n para o qual isto ocorre é $n=5$, portanto,

$$\sqrt[3]{e}\approx 1+\frac{1}{3}+\frac{1}{2!3^2}+\frac{1}{3!3^3}+\frac{1}{4!3^4}+\frac{1}{5!3^5}\,,$$

com erro menor que 10^{-5}. $\blacksquare$

(b) **(1,5 ponto)** $\operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{2}\right)$ com erro inferior a 10^{-6}

Solução. Pela fórmula de Taylor com resto de Lagrange, temos

$$\operatorname{sen} x=x-\frac{x^3}{3!}+\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\frac{\operatorname{sen}^{2n+2}(c)x^{2n+2}}{(2n+2)!}\,,$$

onde c está entre 0 e x. Logo, fazendo $x=1/2$, temos

$$\operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}-\frac{(1/2)^3}{3!}+\ldots+\frac{(1/2)^{2n+1}}{(2n+1)!}+\frac{\operatorname{sen}^{(2n+2)}(1/2)^{2n+2}}{(2n+2)!}\,.$$

Devemos escolher n tal que $\left|\dfrac{\operatorname{sen}^{(2n+2)}(1/2)^{2n+2}}{(2n+2)!}\right|\le\dfrac{1}{2^{2n+2}(2n+2)!}<10^{-5}$. O menor n para o qual isto ocorre é $n=3$, portanto,

$$\operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}\right)\approx\frac{1}{2}-\frac{1}{3!2^3}+\frac{1}{5!2^5}-\frac{1}{7!2^7}\,,$$

com erro menor que 10^{-6}. $\blacksquare$

(c) **(2 pontos)** $\int_0^1 \operatorname{sen}(x^5)\,dx$ com erro inferior a 10^{-6}

Solução. Pela fórmula de Taylor com resto de Lagrange, trocando x por x^5, temos

$$\operatorname{sen}(x^5) = x^5 - \frac{x^{15}}{3!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{10n+5}}{(2n+1)!} + \frac{\operatorname{sen}^{2n+2}(c)\,x^{10n+10}}{(2n+2)!},$$

onde c está entre 0 e x^5. Integrando de 0 a 1, temos

$$\int_0^1 \operatorname{sen}(x^5)\,dx = \int_0^1 \left\{x^5 - \frac{x^{15}}{3!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{10n+5}}{(2n+1)!}\right\} dx + \int_0^1 \frac{\operatorname{sen}^{2n+2}(c)\,x^{10n+10}}{(2n+2)!}\,dx.$$

Agora precisamos escolher n de forma que o erro, em módulo, seja menor que 10^{-6}, ou seja,

$$\left|\int_0^1 \frac{\operatorname{sen}^{2n+2}(c)\,x^{10n+10}}{(2n+2)!}\,dx\right| \le \int_0^1 \frac{x^{10n+10}}{(2n+2)!}\,dx = \frac{1}{(10n+11)(2n+2)!} < 10^{-6}.$$

O menor n para o qual isto ocorre é $n = 3$, logo,

$$\int_0^1 \operatorname{sen}(x^5)\,dx \approx \int_0^1 \left\{x^5 - \frac{x^{15}}{3!} + \frac{x^{25}}{5!} - \frac{x^{35}}{7!}\right\} dx = \frac{1}{6} - \frac{1}{3!16} + \frac{1}{5!26} - \frac{1}{7!36},$$

com erro menor que 10^{-6}.

∎