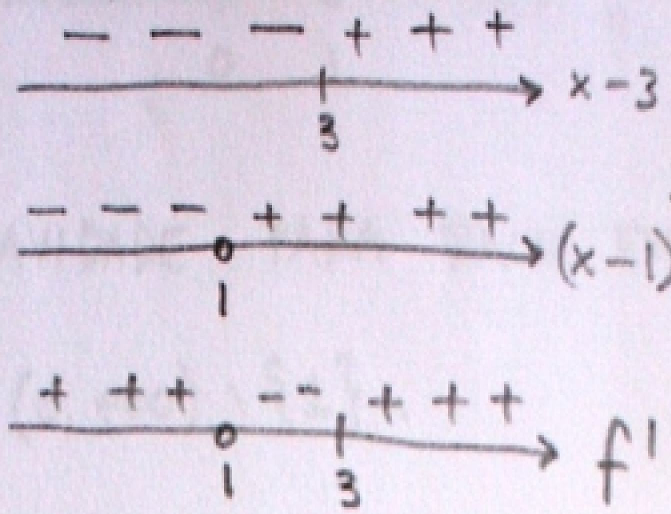
Questão 1 Seja $f(x) = \dfrac{x^3}{(x-1)^2}, x \neq 1.$

1. **(1,5 ponto)** Determine os intervalos de crescimento/decrescimento e os pontos críticos de f, classificando-os.

$$f'(x) = \frac{x^2(x-3)}{(x-1)^3}$$



f É CRESCENTE EM $(-\infty, 1) \cup (3, +\infty)$ E

DECRESCENTE EM $(1, 3)$.

SEUS PONTOS CRÍTICOS SÃO $x_1 = 0$ E $x_2 = 3$.

ESTE ÚLTIMO É PONTO DE MÍNIMO LOCAL. COMO

$f''(x_1) = 0$, NADA SE PODE DIZER, POR ENQUANTO,

SOBRE x_1.

2. **(1,5 ponto)** Determine a concavidade do gráfico de f, os pontos de inflexão, as assíntotas (se existirem) e esboce o gráfico de f.

$$f''(x) = \frac{6x}{(x-1)^4}$$

$$\begin{array}{ccccc} - \; - \; - & & + \; + & & + \; + \; + \\ \hline & 0 & & 1 & \end{array} \quad f''$$

ASSIM, f TEM CONCAVIDADE PARA BAIXO EM $(-\infty, 0)$ E P/ CIMA EM $(0, +\infty) \setminus \{1\}$.

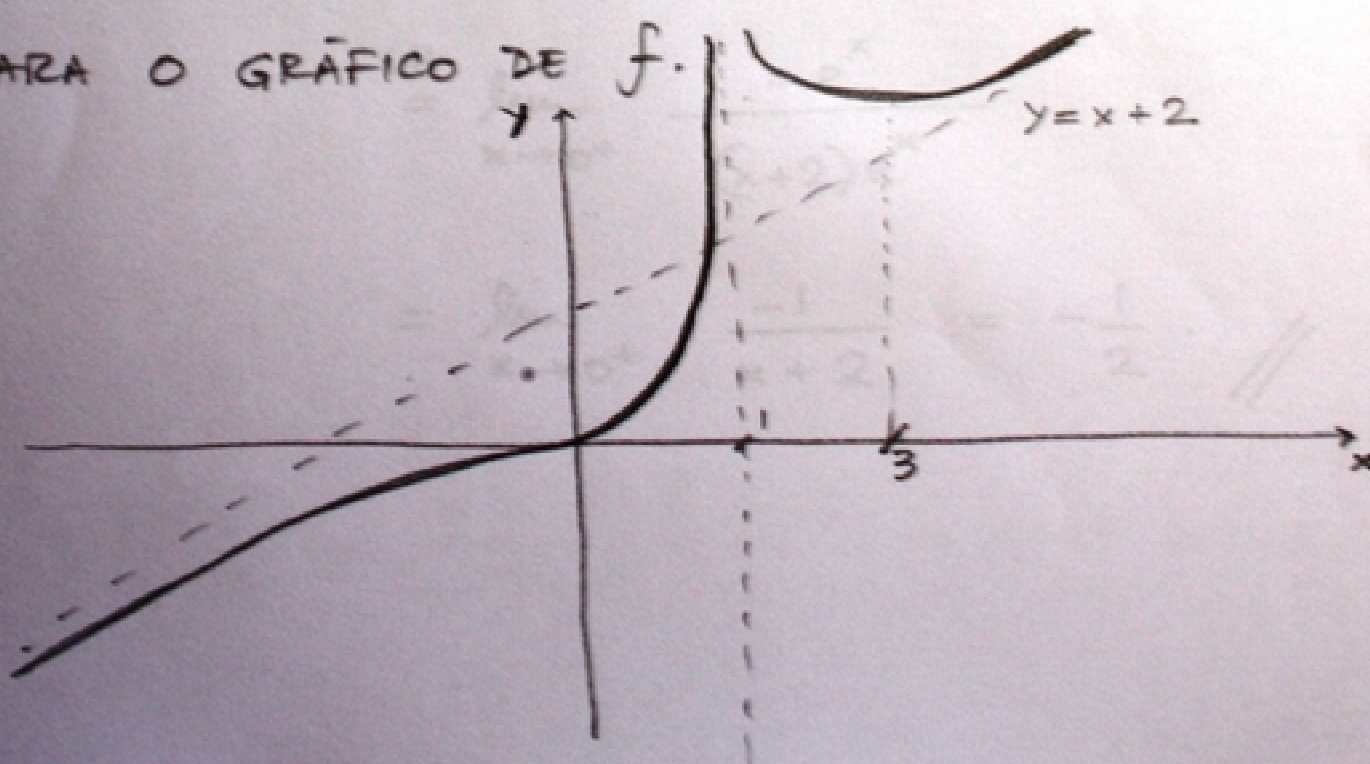
COMO f'' MUDA DE SINAL EM $x_1 = 0$, TEMOS QUE x_1 É PONTO DE INFLEXÃO.

TEMOS $\lim\limits_{x \to 1^{\pm}} f(x) = \pm\infty$, LOGO, $x = 1$ É ASSÍNTOTA VERTICAL PARA O GRÁFICO DE f.

TEMOS

$$\frac{x^3}{(x-1)^2} = x + 2 + \underbrace{\frac{3x-2}{(x-1)^2}}_{\xrightarrow[x \to \pm\infty]{} 0},$$

LOGO, A RETA $y = x + 2$ É ASSÍNTOTA INCLINADA PARA O GRÁFICO DE f.



Questão 2 Calcule os limites abaixo:

(a) **(1 ponto)** $\lim_{x\to 0}(e^{3x}-2\operatorname{sen}x)^{\frac{1}{x^3-5x}} = \lim_{x\to 0} e^{\frac{\ln(e^{3x}-2\operatorname{sen}x)}{x^3-5x}}$

COMO $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(e^{3x}-2\operatorname{sen}x)}{x^3-5x} \overset{LH}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\frac{3e^{3x}-2\cos x}{e^{3x}-2\operatorname{sen}x}}{3x^2-5} = -\frac{1}{5}$,

TEMOS QUE $\lim_{x\to 0}(e^{3x}-2\operatorname{sen}x)^{\frac{1}{x^3-5x}} = e^{-1/5}$. //

(b) **(1 ponto)** $\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{e^x-1}-\frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to 0^+} \frac{x-e^x+1}{(e^x-1)x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x-e^x+1}{xe^x-x}$

$\overset{LH}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{1-e^x}{(x+1)e^x-1}$

$\overset{LH}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{-e^x}{(x+2)e^x}$

$= \lim_{x\to 0^+} \frac{-1}{x+2} = -\frac{1}{2}$. //

Questão 3 Seja $f(x) = \int_0^{x^3-4x^2+\cos x} e^{-t^4}\,dt,\ x \in \mathbb{R}$.

(a) **(1,5 ponto)** Calcule $f'(x)$.

$$f'(x) = e^{-(x^3-4x^2+\cos x)^4} \cdot (3x^2 - 8x - \operatorname{sen} x)$$

(b) **(1,5 ponto)** Estime $f(0)$ com erro inferior a 10^{-6}.

$$f(0) = \int_0^1 e^{-t^4}\,dt$$

TEMOS

$$e^{-t^4} = 1 - \frac{t^4}{1!} + \frac{t^8}{2!} - \dots + (-1)^n \frac{t^{4n}}{n!} + \frac{e^c (-1)^{n+1}}{(n+1)!} t^{4n+4},$$

$$0 \leq -c \leq t^4$$

$$\therefore \int_0^1 e^{-t^4}\,dt = \int_0^1 \left\{ 1 - t^4 + \frac{t^8}{2!} - \dots + (-1)^n \frac{t^{4n}}{n!} \right\} dt + \underbrace{\int_0^1 \frac{e^c (-1)^{n+1}}{(n+1)!} t^{4n+4}\,dt}_{\text{ERRO} = E}$$

$$|E| \leq \int_0^1 \frac{t^{4n+4}}{(n+1)!}\,dt = \frac{1}{(4n+5)(n+1)!} \overset{?}{<} 10^{-6} \Rightarrow n = 7 \text{ SERVE } \therefore$$

$$f(0) = \int_0^1 e^{-t^4}\,dt \cong 1 - \frac{1}{5\cdot 1!} + \frac{1}{9 \cdot 2!} - \frac{1}{13\cdot 3!} + \frac{1}{17\cdot 4!} - \frac{1}{21\cdot 5!} + \frac{1}{25\cdot 6!} - \frac{1}{29\cdot 7!},$$

COM ERRO $< 10^{-6}$.

Questão 4 Calcule:

(a) **(1 ponto)** $\int_0^{\pi/4} \sec^4 x dx$

$$= \int_0^{\pi/4} \sec^2 x \cdot \sec^2 x \, dx$$

$$= \int_0^{\pi/4} (1+tg^2 x) \sec^2 x \, dx$$

$$= tg\,x + \frac{tg^3 x}{3} \Big|_{x=0}^{x=\pi/4}$$

$$= 1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}.$$

(b) **(1 ponto)** $\int \arctan \sqrt{x} dx$

$\sqrt{x} = u$

$\frac{dx}{2\sqrt{x}} = du$

$\therefore dx = 2u\,du$

$$= \int \arctan u \cdot 2u\,du$$

$$= 2\int \underbrace{u}_{f'} \cdot \underbrace{\arctan u}_{g} \, du$$

$$= 2\left\{ \frac{u^2}{2} \arctan u - \int \frac{u^2}{2} \cdot \frac{du}{1+u^2} \right\}$$

$$= u^2 \arctan u - \int \left\{ 1 - \frac{1}{1+u^2} \right\} du$$

$$= u^2 \arctan u - u + \arctan u + C$$

$$= x \arctan \sqrt{x} - \sqrt{x} + \arctan \sqrt{x} + C$$

$$= (x+1) \arctan \sqrt{x} - \sqrt{x} + C.$$