UFPR - Universidade Federal do Paraná
Departamento de Matemática
CM043 - Cálculo III - Turma B - 2012/1
Prof. José Carlos Eidam

Lista 2

✰ Série de Taylor

1. Usando derivação e integração termo a termo, calcular as somas das séries de potências:

   (1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ (2) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$ (3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{2n-1}$ (4) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1}$

   (5) $\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n$ (6) $\sum_{n=1}^{\infty} nx^n$ (7) $\sum_{n=1}^{\infty} nx^{2n-1}$ (8) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n(n-1)}$

   (9) $\sum_{n=1}^{\infty} n^2x^{n-1}$ (10) $\sum_{n=1}^{\infty} n^3x^n$ (11) $\sum_{n=0}^{\infty}(n+4)x^n$ (12) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{4n}}{4n}$

2. Use as séries do exercício anterior para calcular:

   (a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n}$ (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{2^n}$ (c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{5^n(n-1)}$

3. Determine as expansões em séries de potências em torno de $x_0 = 0$ das seguintes funções e os valores de x para os quais essas expansões são válidas:

   (a) $\frac{1}{(1+x)^2}$ (b) $\frac{1}{(1+x)^3}$ (c) $\frac{2x}{1+x^4}$ (d) $\ln(1+x)$ (e) $\ln\left(\frac{1}{1+3x^2}\right)$

4. Verifique que

   (a) $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$, $x \in \mathbb{R}$ (b) $\operatorname{sen} x = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$, $x \in \mathbb{R}$

   (c) $\cos x = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$, $x \in \mathbb{R}$ (d) $\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = 2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$, $|x| < 1$

   (e) $\arctan\ x = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$, $|x| \le 1$ (f) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{6} x^n = \frac{1}{(1-x)^4}$, $|x| < 1$

5. Utilizando as séries do exercício anterior, obtenha um valor aproximado de:

   (a) e, com erro inferior a 10^{-5}.
   (b) $\operatorname{sen} 1$, com erro inferior a 10^{-5} e a 10^{-7}.
   (c) $\ln 2$ e $\ln 3$, com erro inferior a 10^{-5}.
   (d) $\arctan(1/2)$ e $\arctan(1/3)$, com erro inferior a 10^{-5}.
   (e) $\pi/4$, com erro inferior a 10^{-5}, usando que $\pi/4 = \arctan(1/2) + \arctan(1/3)$, (esta igualdade segue da identidade $\operatorname{tg}(x+y) = \frac{\operatorname{tg}(x)+\operatorname{tg}(y)}{1-\operatorname{tg}(x)\operatorname{tg}(y)}$

6. Calcule $\frac{d^{320}\arctan}{dx^{320}}(0)$ e $\frac{d^{321}\arctan}{dx^{321}}(0)$

7. Desenvolva em série de potências de x as seguintes funções, indicando os intervalos de convergência:

   (a) $f(x) = x^2 e^x$ (b) $f(x) = \cos\sqrt{x}$ (c) $f(x) = \operatorname{sen}(x^2)$

   (d) $f(x) = \cos^2 x$ (e) $f(x) = \int_0^x \frac{\operatorname{sen} t}{t}\, dt$ (f) $f(x) = \int_0^x e^{-t^2}\, dt$

   (g) $f(x) = \int_0^x \frac{\ln(1+t)}{t}\, dt$ (h) $f(x) = \int_0^x \operatorname{sen}(t^2)\, dt$ (i) $f(x) = \frac{e^{x^2}-1}{x}$

8. Utilizando a expansão em série de potências das funções envolvidas, calcule os seguintes limites:

   (a) $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x}$ (b) $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2}$ (c) $\lim_{x\to 0} \frac{x-\operatorname{sen} x}{x^3}$ (d) $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x}$

   (e) $\lim_{x\to 0} \frac{\arctan x}{x}$ (f) $\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x}$ (g) $\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^3}-1}{x^2}$ (h) $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)-\ln(1-x)}{x}$

☆ Equações diferenciais de primeira ordem

9. Determine as soluções das equações diferenciais de 1a. ordem abaixo:

   (a) $y' = y^2$ (b) $xy' = y$
   (c) $yy' = x$ (d) $y' = (1-y)(2-y)$
   (e) $(x+3y) - x\frac{dy}{dx} = 0$ (f) $y' = 2y + e^x$

10. Determine as soluções das equações abaixo com condições iniciais dadas:

    (a) $y' = x + y,\ y(0) = 1$ (b) $(\cos t)x' - (\operatorname{sen} t)x = 1,\ x(2\pi) = \pi$
    (c) $y' = x(1+y),\ y(0) = -1$

11. Determine duas soluções distintas para cada uma das equações com a condição inicial dada:

    (a) $y' = 5y^{4/5},\ y(0) = 0$ (b) $y' = 3\sqrt[3]{y^2}(3x^2+1),\ y(0) = 0$

12. Resolva as equações:

    (a) $y' = e^{x-2y}$ (b) $x^2y^2\frac{dy}{dx} = 1 + x^2$
    (c) $y'\operatorname{sen} x + y\cos x = 1$ (d) $y' = x^3 - 2xy$
    (e) $\left(3x^2\operatorname{tg} y - \frac{2y^3}{x^3}\right) + \left(x^3\sec^2 y + 4y^3 + \frac{3y^2}{x^2}\right)y' = 0$ (f) $(1-xy) + (xy - x^2)\frac{dy}{dx} = 0$
    (g) $xy' = y + \sqrt{x^2+y^2}$ (h) $(1+t^2)y' + ty + (1+t^2)^{5/2} = 0$
    (i) $\frac{dr}{d\theta} = \sec^2\theta\sec^3 r$ (j) $3t^2x' = 2x(x-3)$
    (k) $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + \cos^2\left(\frac{y}{x}\right)$ (l) $(1-xy)y' = y^2$
    (m) $xy' = \sqrt{x^2+y^2},\ x > 0$ (n) $y' = \frac{x+2y}{x}$
    (o) $y' = \frac{y^2-2xy}{x^2}$ (p) $y' = \frac{y^2}{xy+y^2}$
    (q) $y' = y\ln x$ (r) $y' = x - y$

13. Resolva as seguintes equações de Bernoulli:

    (a) $y(6x^2y^2 - x + 1) + 2xy' = 0$ (b) $y' = y + e^{-3x}y^4$
    (c) $2x^3y' = y(y^2 + 3x^2)$ (d) $x^3y' = 2y(\sqrt[3]{y} + 3x^2)$
    (e) $y' = 5y - \frac{4x}{y}$ (f) $y' = y - y^3$
    (g) $x^2y' + 2xy - y^3 = 0$ (h) $y' = y - y^2$

14. Resolva as equações:

(a) $(x+y)dx + x\,dy = 0$
(b) $(xe^y + y - x^2)dy = (2xy - e^y - x)dx$
(c) $\cos\, x\, dy = (1 - y - \operatorname{sen} x)dx$
(d) $y(x^2+y^2)dx + x(3x^2 - 5y^2)dy = 0$
(e) $(x^2+y^2)dx + (x^3 + 3xy^2 + 2xy)dy = 0$
(f) $dx + \cos y\, dy = 0$
(g) $(y - x^3)dx + (y^3 + x)dy = 0$
(h) $(3x^2 + y)dx + (x+4)dy = 0$
(i) $(x+2y)dx + (2x+1)dy = 0$
(j) $y' = \frac{3x^2-y}{x-3y^2}$
(k) $(2x + \operatorname{sen} y)dx + x\cos y\, dy = 0$
(l) $(3y^2 - x^2 + 1)dx + 2xy = 0$
(m) $(xy^2 + 2)dx + 3x^2y = 0$
(n) $(2x+3y)dx + x^3 dy = 0$
(o) $e^{x+y^2}dx + 2ye^{x+y^2}dy = 0$

15. Fatores integrantes:

(a) Determine todas as funções f que tornam exata a equação diferencial $(y^2 \operatorname{sen} x)dx + yf(x)dy = 0$.

(b) A equação $g(x)dy + (y+x)dx = 0$ tem $h(x) = x$ como fator integrante. Determine todas as possíveis funções g.

(c) A equação $e^x \sec y - \operatorname{tg} y + y' = 0$ tem um fator integrante da forma $f(x,y) = e^{ax}\cos y$. Determine$a$ e resolva a equação.

(d) Determine um fator integrante da forma $h(x,y) = x^n y^m$ para a equação

$$y(y^2+1)dx + x(y^2-1)\ln x\, dy = 0$$

e resolva-a.

(e) Determine um fator integrante da forma $\mu = \mu(x+y^2)$ para a equação

$$(3x + 2y + y^2)dx + (x + 4xy + 5y^2)dy = 0.$$

(f) Determine um fator integrante da forma $\mu = \mu(x^2+y^2)$ para a equação

$$xdx + ydy + x(xdy - ydx) = 0.$$

16. Determine uma função $y = f(x)$ definida em um intervalo I, cujo gráfico passe pelo ponto $(0, 5/4)$ e tal que para todo $t > 0$, $t \in I$, o comprimento do gráfico de $y = f(x)$, $0 \le x \le t$, seja igual à área do conjunto $0 \le y \le f(x)$, $0 \le x \le t$.

✰ Equações diferenciais lineares de segunda ordem com coeficientes constantes

17. Resolva as equações diferenciais abaixo:

(a) $y'' + 2y' + y = 0$
(b) $y'' - 4y' + 4y = 0$
(c) $y''' - y'' + y' - y = 0$
(d) $2y'' - 4y' - 8y = 0$
(e) $y'' - 9y' + 20y = 0$
(f) $2y'' + 2y' + 3y = 0$
(g) $y''' - 3y'' + 3y' - y = 0$
(h) $y^{(iv)} + y = 0$
(i) $y^{(v)} + 2y''' + y' = 0$
(j) $y'' - 2y' + 2y = 0$
(k) $y'' + 4y = 0$
(l) $y'' + 4y' + 5y = 0$

☆ **Respostas** (C denota qualquer constante real)

(1) (1) $-\ln(1-x)$; (2) $\ln(1+x)$; (3) $\ln\left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right)$; (4) $\arctan x$; (5) $\frac{1}{(1-x)^2}$; (6) $\frac{x}{(1-x)^2}$; (7) $\frac{x}{(1-x^2)^2}$; (8) $(1+x)\ln(1+x)-x$; (9) $\frac{1+x}{(1-x)^3}$; (10) $\frac{x+4x^2+x^3}{(1-x)^4}$; (11) $\frac{4-3x}{(1-x)^2}$; (12) $\frac{-1}{4}\ln(1-x^4)$.

(2) (a) $\ln 2$; (b) $\frac{3}{128}$; (c) $\frac{6}{5}\ln\frac{6}{5}-\frac{1}{5}$.

(3) (a) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}(n+1)x^n$, $|x|<1$; (b) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(n+1)(n+2)}{1}x^n$, $|x|<1$; (c) $\sum_{n=0}^{\infty}2(-1)^n x^{4n+1}$, $|x|<1$; (d) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}x^n$, $|x|<1$; (e) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 3^n}{n}x^{2n}$, $|x|<1$.

(7) (a) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+2}}{n!}$, $x\in\mathbb{R}$; (b) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^n}{(2n)!}$, $x\in\mathbb{R}$; (c) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{4n+2}}{(2n+1)!}$, $x\in\mathbb{R}$; (d) $1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 2^{2n-1}}{(2n)!}x^{2n}$, $x\in\mathbb{R}$; (e) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^2(2n)!}x^{2n+1}$, $x\in\mathbb{R}$; (f) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)n!}x^{2n+1}$, $x\in\mathbb{R}$; (g) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}x^n$, $|x|<1$; (h) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!(4n+3)}x^{4n+3}$, $x\in\mathbb{R}$; (i) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{n!}$, $x\in\mathbb{R}$.

(9) (a) $y\equiv 0$ e $y=\frac{1}{C-x}$; (b) $y=Cx$; (c) $y=\pm\sqrt{x^2+C}$; (d) $y\equiv 1$, $y\equiv 2$, $y=\frac{Ce^x-2}{Ce^x-1}$; (e) $y=Cx^3-\frac{x}{2}$; (f) $y=Ce^{2x}-e^x$

(10) (a) $y=2e^x-x-1$; (b) $x=\frac{t-\pi}{\cos t}$; (c) $y\equiv -1$; **(11)** (a) $y\equiv 0$ e $y=x^5$; (b) $y\equiv 0$ e $y=(x^3+x)^3$

(12) (a) $y=\frac{1}{2}\ln(2e^x+C)$; (b) $y=\sqrt[3]{\frac{3x^2-3-Cx}{x}}$; (c) $y=\frac{x+C}{\operatorname{sen} x}$; (d) $y=\frac{1}{2}(x^2-1)+Ce^{-x^2}$;
(e) $x^3\, tg\, y+y^4+\frac{y^3}{x^2}=C$; (f) $y^2-2xy+\ln(x^2)=C$; (g) $y\pm\sqrt{x^2+y^2}=\pm x^2$; (h) $y=\frac{C-15t-10t^3-3t^5}{15\sqrt{1+t^2}}$;
(i) $3\operatorname{sen} r-\operatorname{sen}^3 r=3\operatorname{tg}\theta+C$; (j) $x\equiv 0$, $x\equiv 3$ e $x=\frac{3}{1-Ce^{-2/t}}$; (k) $\operatorname{tg}\left(\frac{y}{x}\right)=\ln|x|+C$; (l) $xy-\ln|y|=C$;
(m) $\frac{y^2+y\sqrt{x^2+y^2}}{x^2}+\ln\left|\frac{y+\sqrt{x^2+y^2}}{x^3}\right|=C$; (n) $y=Cx^2-x$; (o) $y=\frac{3x}{1-Cx^3}$; (p) $y+x\ln|y|=Cx$;
(q) $y=C(x/e)^x$ (r) $y=(x-1)+Ce^{-x}$;

(13) (a) $y\equiv 0$, $y^2=\frac{1}{6x+Cxe^{-x}}$; (b) $y\equiv 0$, $y=\frac{e^x}{\sqrt[3]{C-3x}}$; (c) $y\equiv 0$, $y^2=\frac{x^3}{C-x}$; (d) $y\equiv 0$, $y=\frac{27x^6}{(C-\ln(x^2))^3}$;
(e) $y=Ce^{10x}+\frac{20x+2}{25}$; (f) $y=\pm(Ce^{-2x}+1)^{-1/2}$; (g) $y=(2/5x+Cx^4)^{-1/2}$; (h) $y=(1+Ce^{-x})^{-1}$

(14) (a) $x^2+2xy=C$; (b) $x^2+y^2+2xe^y-2x^2y=C$; (c) $y=\frac{x+C}{\sec x+\operatorname{tg} x}$; (d) $y^3(x^2-y^2)=Cx$;
(e) $x^3+3xy^2=Ce^{-3y}$; (f) $y=\arcsin(C-x)$; (g) $4xy-x^4-y^4=0$; (h) $y=\frac{C-x^3}{x+4}$; (i) $y=\frac{x^2+C}{2(1-2x)}$; (j) $xy-x^3-y^3=C$; (k) $y=\arcsin\left(\frac{C-x^2}{x}\right)$; (l) $15x^3y^2-3x^5+5x^3=C$; (m) $x^{2/3}y^2+2x^{2/3}=C$;
(n) $y=\frac{C-x^4}{2x^3}$; (o) $y=\pm\sqrt{C-x}$;

(15) (a) $f(x)=C-2\cos x$; (b) $g(x)=\frac{x}{2}+\frac{C}{x}$; (c) $a=-1$, $x+e^{-x}\operatorname{sen} y=C$; (d) $n=-1$, $m=-2$, $(y^2+1)\ln x=Cy$ e $y\equiv 0$; (e) $\mu(x+y^2)=x+y^2$; (f) $\mu=(x^2+y^2)^{-3/2}$

(16) $y=\frac{e^{-x}+4e^x}{4}$

(17) (a) $y=C_1e^{-x}+C_2xe^{-x}$; (b) $y=C_1e^{2x}+C_2xe^{2x}$; (c) $y=C_1e^x+C_2\operatorname{sen} x+C_3\cos x$;
(d) $y=e^x(C_1\operatorname{sen}(\sqrt{3}x)+C_2\cos(\sqrt{3}x))$; (e) $y=C_1e^{5x}+C_2e^{4x}$;
(f) $y=e^{-x/2}(C_1\operatorname{sen}(\frac{\sqrt{3}}{2}x)+C_2\cos(\frac{\sqrt{3}}{2}x))$; (g) $y=C_1e^x+C_2xe^x+C_3x^2e^x$;
(h) $y=C_1\cos(\frac{\sqrt{2}}{2}x)+C_2\operatorname{sen}(\frac{\sqrt{3}}{2}x)$; (i) $y=C_1+(C_2+C_3x)\cos x+(C_4+C_5x)\operatorname{sen} x$;
(j) $y=C_1e^x\cos x+C_2e^x\operatorname{sen} x$; (k) $y=C_1\operatorname{sen}(2x)+C_2\cos(2x)$; (l) $y=C_1e^{-2x}\cos x+C_2e^{-2x}\operatorname{sen} x$.