UFPR - Universidade Federal do Paraná
Departamento de Matemática
CM043 - Cálculo III - Turma B - 2012/1
Prof. José Carlos Eidam

Lista 3

✰ Equações diferenciais lineares de segunda ordem

1. Resolva as equações diferenciais abaixo:

   (a) $y'' + 2y' + y = 0$ (b) $y'' - 4y' + 4y = 0$ (c) $y''' - y'' + y' - y = 0$
   (d) $2y'' - 4y' - 8y = 0$ (e) $y'' - 9y' + 20y = 0$ (f) $2y'' + 2y' + 3y = 0$
   (g) $y''' - 3y'' + 3y' - y = 0$ (h) $y^{(iv)} + y = 0$ (i) $y^{(v)} + 2y''' + y' = 0$
   (j) $y'' - 2y' + 2y = 0$ (k) $y'' + 4y = 0$ (l) $y'' + 4y' + 5y = 0$

2. Verifique que y_1 é solução da equação dada e determine, a partir de y_1, outra solução y_2 da equação, de forma que o conjunto $\{y_1(x), y_2(x)\}$ seja linearmente independente.

   (a) $x^2y'' + xy' - 4y = 0,\ y_1 = x^2$ (b) $(1 - x^2)y'' + 2xy' - 2y = 0,\ y_1 = x$
   (c) $y'' - \dfrac{x}{x-1}y' + \dfrac{1}{x-1}y = 0,\ y_1 = x$ (d) $x^2y'' + 2xy' - 2y = 0,\ y_1 = x$
   (e) $xy'' + 3y' = 0,\ y_1 = 1$ (f) $x^2y'' + xy' + \left(x^2 - \dfrac{1}{4}\right)y = 0,\ y_1 = x^{-1/2}$
   (g) $xy'' - (2x+1)y' + (x+1)y = 0,\ y_1 = e^x$ (h) $y'' - 4y' + 12y = 0,\ y_1 = e^{6x}$
   (i) $x^2y'' + 2xy' = 0,\ y_1 = 1$ (j) $x^2y'' + 3xy' + y = 0,\ y_1 = x^{-1}$
   (k) $x^2y'' - x(x+2)y' + (x+2)y = 0;\ y_1 = x$ (l) $(1 - x^2)y'' - 2xy' + 6y = 0;\ y_1 = 3x^2 - 1$

3. Considere a equação diferencial

$$xy'' - (x+n)y' + ny = 0,$$

   onde n é um inteiro não-negativo.

   (a) Mostre que $y_1 = e^x$ é solução da equação.
   (b) Mostre que $y_2 = Ce^x \int x^n e^{-x}dx$, $C \in \mathbb{R}$, é uma solução da equação dada e $\{y_1, y_2\}$ é linearmente independente.
   (c) Estude os casos $n = 1$ e $n = 2$.

4. Resolva as seguintes equações de Euler em $(0, +\infty)$:

   (a) $x^2y'' + xy' + y = 0$ (b) $x^2y'' - 3xy' + 4y = 0$ (c) $x^2y'' + 3xy' + 10y = 0$
   (d) $2x^2y'' + 10xy' + 3y = 0$ (e) $x^2y'' + 2xy' - 12y = 0$ (f) $2x^2y'' + 3xy' - y = 0$
   (g) $x^2y'' + 5xy' + 4y = 0$ (h) $x^2y'' + xy' + y = 0$ (i) $x^2y'' + 4xy' + 2y = 0$
   (j) $x^2y'' - xy' + y = 0$ (k) $x^2y'' + 3xy' + 5y = 0$ (l) $2x^2y'' - 4xy' + 6y = 0$
   (m) $x^2y'' - 5xy' + 9y = 0$ (n) $x^2y'' + 2xy' + 4y = 0$ (o) $x^2y'' - 2y = 0$

5. Determine a solução geral das seguintes equações lineares de segunda ordem não-homogêneas:

(a) $y'' + 2y' + y = e^{-x}\ln x$ (b) $y'' - 2y' - 3y = 64xe^{-x}$ (c) $y'' + 2y' + 5y = e^{-x}\sec 2x$
(d) $y'' - 2y' = 12x - 10$ (e) $y'' + y = 2\cos x$ (f) $y'' + 2y' + y = 3e^{-x}$
(g) $y'' + 2y' + 2y = e^{-x}\operatorname{sen} x$ (h) $y'' + 4y = 3\operatorname{sen} x$ (i) $y'' + 10y' + 25y = 14e^{-5x}$
(j) $y'' - 4y = x^2 e^{2x}$ (k) $y'' + y' - 2y = 8\operatorname{sen} x$ (l) $y'' - 3y' = x + \cos x$
(m) $y'''' - 2y''' + y'' = x^3$ (n) $y''' - y = x^3 - 1$ (o) $y'' - 2y = 2e^x(\cos x - \operatorname{sen} x)$
(p) $y'' - 3y' - 4y = 2\operatorname{sen} x$ (q) $y'' - 3y' - 4y = 4x^2$ (r) $y'' - 5y' + 6y = 2e^x$
(s) $y'' + 9y = 9\sec^2(3x)$ (t) $y'' + y = \operatorname{tg} x$ (u) $y'' - 4y' + 4y = \frac{e^{-2x}}{x^2}$
(v) $y'' + 4y = \operatorname{cossec} 2x$ (w) $y'' + y = \sec x$ (x) $y'' - 3y' + 2y = e^x\operatorname{sen} x$
(y) $xy'' - y' = 3x^2$ (z) $x^2y'' + xy' - y = x^2$

6. Determine a solução geral das seguintes equações lineares de segunda ordem não-homogêneas (com coeficientes variáveis):

(a) $(x^2-1)y'' - 2xy' + 2y = (x^2-1)^2$ (b) $x^2y'' - 2xy' + 2y = 4x^2$
(c) $x^2y'' + 7xy' + 5y = x$ (d) $x^2y'' - x(x+2)y' + (x+2)y = 0$
(e) $xy'' - (1+x)y' + y = x^2e^{2x}$ (f) $x^2y'' + xy' + (x^2 - \frac{1}{4})y = 3x^{3/2}\operatorname{sen} x$ (Use o exercício 1(f))

7. (Princípio de superposição) Se y_1 e y_2 são soluções de $y'' + f(x)y' + g(x)y = h_1$ e $y'' + f(x)y' + g(x)y = h_2$, respectivamente, mostre que $y = y_1 + y_2$ é solução de $y'' + f(x)y' + g(x)y = h_1 + h_2$. Use este fato para resolver:

(a) $y'' + 3y' + 2y = e^x + e^{2x}$ (b) $y'' + y = \cos x + 8x^2$

8. Ache a solução geral da equação diferencial dada em série de potências centradas em $x_0 = 0$:

(a) $y'' - xy' - y = 0$ (b) $y'' - x^2y = 0$ (c) $y'' + 2xy' + 4y = 0$
(d) $y'' - xy = 0$ (Equação de Airy) (e) $y'' - xy' - y = 0$ (f) $y'' - y = 0$
(g) $y'' - 2xy' + \lambda y = 0$ (Equação de Hermite) (h) $(1-x)y'' + y = 0$ (i) $y'' + \alpha^2x^2y = 0$, $\alpha \neq 0$
(j) $y'' + x^2y' + xy = 0$ (k) $y'' = x^2y$ (l) $y'' = x^3y$

9. Dado $\alpha \in \mathbb{R}$, a equação diferencial

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - \alpha^2)y = 0,$$

é chamada *Equação de Bessel de ordem α*.

(a) Se $\alpha = 0$, mostre que $y_1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{2n}(n!)^2} x^{2n}$ e $y_2 = y_1 \ln x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2^{2n}(n!)^2}\left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}\right)x^{2n}$ são soluções linearmente independentes da equação de Bessel.

(b) Se $\alpha = 1$ mostre que $y = x\left(1 - \frac{x^2}{2^2 2!} + \frac{x^4}{2^4 2!3!} - \frac{x^6}{2^6 2!3!4!} + \ldots\right)$ é solução.

10. Dado $\alpha \in \mathbb{R}$, a equação diferencial

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + \alpha(\alpha+1)y = 0,$$

é chamada *Equação de Legendre de ordem α*. Mostre que as funções

$$y_1 = 1 + \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \frac{\alpha(\alpha-2)(\alpha-4)\ldots(\alpha-2m+2)(\alpha+1)(\alpha+3)\ldots(\alpha+2m-1)}{(2m)!} x^{2m},$$
$$y_2 = x + \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \frac{(\alpha-1)(\alpha-3)\ldots(\alpha-2m+1)(\alpha+2)(\alpha+4)\ldots(\alpha+2m)}{(2m+1)!} x^{2m+1}$$

são soluções linearmente independentes da equação de Legendre no intervalo $(-1,1)$.

11. (Série binomial) Seja α um número real *não-inteiro*. Neste exercício, vamos encontrar uma expansão em série de potências para $(1+x)^\alpha$ em torno de $x=0$.

   (a) Mostre que $y=(1+x)^\alpha$ é a única solução da equação $(1+x)y'=\alpha y$ em $(-1,\infty)$ satisfazendo $y(0)=1$.

   (b) Mostre que a série de potências

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n$$

   tem raio de convergência 1.

   (c) Mostre que $1+g(x)$ satisfaz a mesma equação diferencial do ítem (a) e vale 1 em $x=0$. Conclua que para todo α não-inteiro vale

$$(1+x)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n$$

   se $|x|<1$.

   A série acima é chamada de *série binomial* e foi estudada primeiramente por Newton. A igualdade acima generaliza a fórmula usual do binômio de Newton e nos induz a definir para α não-inteiro e $n \in \mathbb{N}$ o coeficiente binomial $\binom{\alpha}{n} \doteq \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}$. Dessa forma, temos para cada $x \in (-1,1)$ que

$$(1+x)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n.$$

✍ ✍ ✍ ✍ ✍ ✍ ✍ ✍ ✍ ✍ ✍

☆ **Roteiro para resolver uma equação diferencial linear de segunda ordem** $y''+py'+qy=f$ **(via método de variação dos parâmetros):**

(a) Encontre soluções linearmente independentes y_1, y_2 da equação homogênea associada $y''+py'+qy=0$;

(b) Calcule o Wronskiano $W(y_1,y_2)=\det\begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{pmatrix}$;

(c) A solução geral da equação é soma de uma *solução particular* com uma *solução geral* da equação homogênea associada:

$$y = -\left(\int \frac{y_2 f}{W(y_1,y_2)} dx\right) y_1 + \left(\int \frac{y_1 f}{W(y_1,y_2)} dx\right) y_2 + C_1 y_1 + C_2 y_2$$

✰ Respostas

(1)

(a) $y = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x}$; (b) $y = C_1 e^{2x} + C_2 x e^{2x}$; (c) $y = C_1 e^{x} + C_2 \operatorname{sen} x + C_3 \cos x$;
(d) $y = e^{x}(C_1 \operatorname{sen}(\sqrt{3}x) + C_2 \cos(\sqrt{3}x))$; (e) $y = C_1 e^{5x} + C_2 e^{4x}$;
(f) $y = e^{-x/2}(C_1 \operatorname{sen}(\frac{\sqrt{3}}{2}x) + C_2 \cos(\frac{\sqrt{3}}{2}x))$; (g) $y = C_1 e^{x} + C_2 x e^{x} + C_3 x^2 e^{x}$;
(h) $y = C_1 \cos(\frac{\sqrt{2}}{2}x) + C_2 \operatorname{sen}(\frac{\sqrt{3}}{2}x)$; (i) $y = C_1 + (C_2 + C_3 x)\cos x + (C_4 + C_5 x)\operatorname{sen} x$;
(j) $y = C_1 e^{x}\cos x + C_2 e^{x} \operatorname{sen} x$; (k) $y = C_1 \operatorname{sen}(2x) + C_2 \cos(2x)$; (l) $y = C_1 e^{-2x}\cos x + C_2 e^{-2x}\operatorname{sen} x$.

(2)

(a) $y_2 = x^{-2}$; (b) $y_2 = 1 - \frac{x}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$; (c) $y_2 = e^{x}$; (d) $y_2 = x^{-2}$; (e) $y_2 = x^{-2}$; (f) $y_2 = x^{-1/2}\cos x$;
(g) $y_2 = e^{x}x^2$; (h) $y_2 = e^{-2x}$; (i) $y_2 = x^{-1}$; (j) $y_2 = x^{-1}\ln x$; (k) $y_2 = x e^{x}$; (l) $y_2 = \frac{3x}{4} + \frac{3x^2-1}{8}\ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$
(Dica: Escreva

$$\frac{1}{(3x^2-1)^2(1-x^2)} = A\left(\frac{1}{(\sqrt{3}x-1)^2} + \frac{1}{(\sqrt{3}x+1)^2}\right) + B\left(\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x}\right).$$

(4)

(a) $y = C_1 \cos(\ln x) + C_2 \operatorname{sen}(\ln x) + 1$; (b) $y = C_1 x^2 + C_2 x^2 \ln x$; (c) $y = x^{-1}\{C_1 \cos(\ln x^3) + C_2 \operatorname{sen}(\ln x^3)\}$;
(d) $y = C_1 x^{-2+\frac{\sqrt{10}}{2}} + C_2 x^{-2+\frac{\sqrt{10}}{2}}$; (e) $y = C_1 x^3 + C_2 x^{-4}$;
(f) $y = C_1 x^{1/2} + C_2 x^{-1}$; (g) $y = x^{-2}(C_1 + C_2 \ln x)$;
(h) $y = C_1 \cos(\ln x) + C_2 \operatorname{sen}(\ln x)$; (i) $y = C_1 x^{-1} + C_2 x^{-2}$;
(j) $y = C_1 x + C_2 x \ln x$; (k) $y = C_1 x^{-1}\cos(2\ln x) + C_2 x^{-1}\operatorname{sen}(2\ln x)$;
(l) $y = C_1 x^{3/2}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln x\right) + C_1 x^{3/2}\operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln x\right)$;
(m) $y = C_1 x^3 + C_2 x^3 \ln x$; (n) $y = C_1 x^{-1/2}\cos\left(\frac{\sqrt{15}}{2}\ln x\right) + C_2 x^{-1/2}\operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{15}}{2}\ln x\right)$; (o) $y = C_1 x^{-1} + C_2 x^2$

(5)

(a) $y = \frac{1}{2}x^2 e^{-x}\ln x - \frac{3}{4}x^2 e^{-x} + C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x}$; (b) $y = -e^{-x}(8x^2 + 4x + 1) + C_1 e^{-x} + C_2 e^{3x}$;
(c) $y = \frac{1}{2}x e^{-x}\operatorname{sen} 2x + \frac{1}{4}e^{-x}\cos 2x + C_1 e^{x}\cos 2x + C_2 e^{x}\operatorname{sen} 2x$; (d) $y = -3x^2 + 2x + 1 + C_1 + C_2 e^{2x}$;
(e) $y = x\operatorname{sen} x + C_1 \operatorname{sen} x + C_2 \cos x$; (f) $y = (3/2)x^2 e^{-x} + C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x}$;
(g) $y = (1/2)e^{-x}\{\cos x(x - (1/2)\operatorname{sen} 2x) + \operatorname{sen}^3 x\} + C_1 e^{-x}\operatorname{sen} x + C_2 e^{-x}\cos x$;
(h) $y = C_1 \cos 2x + C_2 \operatorname{sen} 2x + \operatorname{sen} x$;
(i) $y = e^{-5x}(7x^2 + C_1 x + C_2)$; (j) $y = e^{2x}(x^3/12 - x^2/16 + x/32 - 1/128 + C_1) + C_2 e^{-2x}$;
(k) $y = C_1 e^{x} + C_2 e^{-2x} - (2/5)(3\operatorname{sen} 2x + \cos 2x)$; (l) $y = C_1 + C_2 e^{3x} - (\cos x + 3\operatorname{sen} x)/10 - x^2/6 - x/9$;
(m) $y = C_1 + C_2 x + 12x^2 + 3x^3 + x^4/2 + x^5/20 + (C_3 + C_4 x)e^{x}$;
(n) $y = C_1 e^{x} + e^{-x/2}\left(C_2 \cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + C_3 \operatorname{sen}\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) - x^3 - 5$; (o) $y = C_1 e^{x\sqrt{2}} + C_2 e^{-x\sqrt{2}} + e^{x}\operatorname{sen} x$;
(p) $y = (1/17)(3\cos x - 5\operatorname{sen} x) + C_1 e^{4x} + C_2 e^{-x}$; (q) $y = -x^2 + (3/2)x - 13/8 + C_1 e^{4x} + C_2 e^{-x}$;
(r) $y = e^{x} + C_1 e^{3x} + C_2 e^{2x}$; (s) $y = C_1 \cos 3x + C_2 \operatorname{sen} 3x + \{(\operatorname{sen} 3x)(\ln(\sec(3x) + \operatorname{tg}(3x))) - 1\}$;
(t) $y = -\ln(\operatorname{tg} x + \sec x))\cos x + C_1 \operatorname{sen} + C_2 \operatorname{sen} x$; (u) $y = -e^{-2x}\ln x + C_1 e^{-2x} + C_2 x e^{-2x}$;
(v) $y = (3/4)\operatorname{sen} 2x \ln(\operatorname{sen} 2x) - (3/2)x\cos 2x + C_1 \operatorname{sen} 2x + C_2 \cos 2x$;
(w) $y = x\operatorname{sen} x + \cos x \ln(\cos x) + C_1 \cos x + C_2 \operatorname{sen} x$; (x) $y = (e^{x}/2)(\cos x - \operatorname{sen} x) + C_1 e^{x} + C_2 e^{2x}$
(y) $y = x + C_1 x^2 + C_2$; (z) $y = x^2/3 + C_1 x + C_2/x$

(6)

(a) $y = C_1 x + C_2(x^2 + 1) + x^4/6 - x^2/2$; (b) $y = C_1 x + C_2 x^2 + 4x^2 \ln x$; (c) $y = C_1 x^{-1} + C_2 x^{-5} + x/12$;
(d) $y = C_1 x + C_2 x e^{x} - 2x^2$; (e) $y = C_1(1 + x) + C_2 e^{x} + (1/2)e^{2x}(x - 1)$;
(f) $y = C_1 x^{-1/2}\cos x + C_2 x^{-1/2}\operatorname{sen} x - (3/2)x^{-1/2}\cos x$;

(7)

(a) $y = e^x/6 + e^{2x}/12 + C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x}$; (b) $y = ((1/2)x + C_1)\operatorname{sen} x + C_2 \cos x + 8x^2 - 16$

(8)

(a) $y = C_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2x}}{2^n n!} + C_1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n.n!}{(2n+1)!} x^{2n+1}$;

(b) $y = C_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{4n}}{4n(n-1)(4n-4)(4n-5)...4.3} + C_1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{4n+1}}{(4n+1)(4n)...5.4}$;

(c) $y = C_0 \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n x^{2n}}{(2n-1)(2n-3)...5.3} + C_1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{n!}$

(d) $y = C_0 \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{3n}}{(3n)(3n-1)(3n-3)(3n-4)...3\cdot 2}\right) + C_1 \left(x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{3n+1}}{(3n+1)(3n)(3n-2)(3n-3)...4\cdot 3}\right)$;

(e) $y = C_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{2^n n!} + C_1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n n! x^{2n+1}}{(2n+1)!}$;

(f) $y = C_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} + C_1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = C_0 \cosh x + C_1 \sinh x$;