UFPR - Universidade Federal do Paraná
Departamento de Matemática
CM043 - Cálculo III - Turma B - 2012/1
Prof. José Carlos Eidam

Lista 4

✩ Transformada de Laplace

1. Calcule a transformada de Laplace de cada uma das funções abaixo:

   (1) $f(t) = e^{5t} - 2e^t$ (2) $f(t) = \cos(2t) - t$ (3) $f(t) = 2t^6 - t + \cos(7t)$

   (4) $f(t) = e^{2t-3}$ (5) $f(t) = \sinh(3t) + 5t^2 + 3$ (6) $f(t) = 2t^2 - t + 4$

   (7) $f(t) = \cos^2 t$ (8) $f(t) = e^{2x}(\cosh(3x) + 2\sinh(3x))$ (9) $f(t) = (\operatorname{sen} t - \cos t)^2$

   (10) $f(t) = \begin{cases} 5 & , \text{se } 0 < t < 3 \\ 0 & , \text{se } t \geq 3 \end{cases}$ (11) $f(t) = \begin{cases} 0 & , \text{se } 0 < t < 1 \\ t^2 - 2t + 2 & , \text{se } t \geq 1 \end{cases}$

   (12) $f(t) = \begin{cases} \operatorname{sen} t & , \text{se } 0 < t < 2\pi \\ \operatorname{sen} t + \cos t & , \text{se } t \geq 2\pi \end{cases}$ (13) $f(t) = \begin{cases} 2t & , \text{se } 0 < t < 5 \\ 1 & , \text{se } t \geq 5 \end{cases}$

2. (Função Gamma) A função Gamma é definida por

   $$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} \, dt,$$

   para $x > 0$.

   (a) Mostre que Γ é bem-definida, i.e., que a integral acima é convergente para todo $x > 0$.

   (b) Use integração por partes para mostrar que $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$, para todo $x > 0$.

   (c) Use indução em n para mostrar que $\Gamma(n) = (n-1)!$ para todo inteiro $n > 0$. Isso mostra que a função Γ é uma extensão da função fatorial para todos os reais positivos.

   (d) Mostre que $\mathscr{L}(t^\alpha)(s) = \dfrac{\Gamma(\alpha+1)}{s^{\alpha+1}}$, para todos $s > 0$ e $\alpha > -1$.

3. Vamos estudar a transformada de Laplace da função $f(t) = t^\alpha$ para alguns valores fracionários de α.

   (a) Mostre que $\int_0^\infty e^{-x^2} \, dx = \sqrt{\pi}/2$.

   (b) Mostre que $\mathscr{L}(t^{-1/2}) = \sqrt{\pi/s}$, para $s > 0$.

   (c) Mostre que $\mathscr{L}(t^{1/2}) = \sqrt{\pi}/2s^{3/2}$, para $s > 0$.

4. Mostre que $(\mathscr{L}f)^{(n)}(s) = \mathscr{L}((-t)^n f(t))$ se $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ for de crescimento exponencial. Use este fato para calcular $\mathscr{L}f(s)$ se:

   (1) $f(t) = t^3 \operatorname{sen} t$ (2) $f(t) = t^2 \cos t$ (3) $f(t) = t^2 \sinh t$ (4) $f(t) = t \cosh t$

5. Resolva os seguintes problemas de valor inicial:

   (1) $y'' - y' - 6y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = -1$ (2) $y'' + 3y' + 2y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$

   (3) $y'' - 2y' + 2y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$ (4) $y^{(iv)} - y = 0$, $y(0) = y''(0) = 0$, $y'(0) = y'''(0) = 1$

   (5) $y'' + y = \cos(2t)$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$ (6) $y'' - 2y' + 2y = e^{-t}$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$

   (7) $y'' + y = x$, $y(0) = 1$, $y'(0) = -2$ (8) $y'' - 6y' + 9y = e^{t}$, $y(0) = y'(0) = 1$

6. Verifique as seguintes igualdades para a transformada de Laplace e a transformada de Laplace inversa:

   (a) $\mathscr{L}(f(ct)) = \dfrac{1}{c}\mathscr{L}f\left(\dfrac{s}{c}\right)$;

   (b) $\mathscr{L}^{-1}\{Y(ks)\} = \dfrac{1}{k}\mathscr{L}^{-1}Y\left(\dfrac{t}{k}\right)$;

   (c) $\mathscr{L}^{-1}\{Y(as+b)\} = \dfrac{e^{-bt/a}}{a}\mathscr{L}^{-1}Y\left(\dfrac{t}{a}\right)$, se $a > 0$.

7. Calcule a transformada inversa de Laplace $\mathscr{L}^{-1}Y$:

   (1) $Y(s) = \dfrac{1}{s^2+1} - \dfrac{2s}{(s-1)^2}$ (2) $Y(s) = \dfrac{3s+1}{s^2-4s+8}$ (3) $Y(s) = \dfrac{1}{s^2+4s+13}$

   (4) $Y(s) = \dfrac{2s+1}{4s^2+4s+5}$ (5) $Y(s) = \dfrac{1}{9s^2-12s+3}$ (6) $Y(s) = \dfrac{(s-1)e^{-2s}}{s^2-2s+2}$

   (7) $Y(s) = \dfrac{2e^{-2s}}{s^2-4}$ (8) $Y(s) = \dfrac{e^{-s}(s-2)}{s^2-4s+3}$ (9) $Y(s) = \dfrac{e^{-4s}}{2s-1}$

8. Esboce o gráfico de cada uma das funções abaixo e calcule sua transformada de Laplace:

   (1) $f(t) = 1 - u_1(t)$ (2) $f(t) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n u_n(t)$ (3) $f(t) = \begin{cases} 1 & \text{, em } (0,1)\cup(2,3) \\ 0 & \text{, fora de } (0,1)\cup(2,3) \end{cases}$

   (4) $f(t) = |\text{sen}\, t|$ (5) $f(t) = t,\ 0 \le t < 1,\ f(t+1) = f(t)$ (6) $f(t) = \begin{cases} 1 & \text{, em } (0,1) \\ \text{-1} & \text{, em } (1,2) \end{cases},\ f(t+2) = f(t)$

9. Resolva os seguintes problemas de valor inicial:

   (1) $y'' + y = 1 - u_{\pi/2}(t)$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$
   (2) $y'' + 4y = \text{sen}\, t - u_{2\pi}(t)\text{sen}\,(t - 2\pi)$, $y(0) = y'(0) = 0$
   (3) $y'' + 4y = \text{sen}\, t + u_{\pi}(t)\text{sen}\,(t - \pi)$, $y(0) = y'(0) = 0$
   (4) $y'' + 2y' + y = 1 - u_1(t)$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$
   (5) $y'' + 3y' + 2y = u_2(t)$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$
   (6) $y'' + y = u_{\pi}(t)$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$
   (7) $y'' + y = f(t)$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$, onde $f(t) = \begin{cases} 1 & \text{, em } [0,\pi) \\ 0 & \text{, em } [\pi, 2\pi) \end{cases},\ f(t + 2\pi) = f(t)$
   (8) $y'' + y = f(t)$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$, onde $f(t) = \begin{cases} t & \text{, em } [0,1) \\ 1 & \text{, em } [1,\infty) \end{cases}$
   (9) $y'' + 2y' + 2y = \delta(t - \pi)$, $y(0) = y'(0) = 0$
   (10) $y'' + 2y' + 2y = \delta(t - \pi)$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$

(11) $y'' + 4y = \delta(t-\pi) - \delta(t-2\pi)$, $y(0) = y'(0) = 0$
(12) $y'' + 2y' + y = \delta(t) + u_{2\pi}(t)$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$
(13) $y'' - y = 2\delta(t-1)$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$
(14) $y'' + y = \delta(t-\pi)\cos t$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$

10. Use a transformada de Laplace para calcular as integrais abaixo:

(1) $\displaystyle\int_0^\infty te^{-2t}\cos t\,dt$ (2) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{e^{-t}-e^{-3t}}{t}dt$ (3) $\displaystyle\int_0^\infty t^3e^{-t}\text{sen}\,t\,dt$
(4) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{e^{-t}\text{sen}\,t}{t}dt$ (5) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{e^{-t}\text{sen}^2\,t}{t}dt$ (6) $\displaystyle\int_0^\infty te^{-3t}\text{sen}\,t\,dt$

☆ **Respostas**

(1)

(1) $Y = (s-5)^{-1} + 2(s-1)^{-1}$; (2) $Y = s(s^2+4)^{-1} - s^{-1}$; (3) $Y = 1040s^{-7} - s^{-1} + s(s^2+49)$;
(4) $Y = e^{-3}(s-2)^{-1}$; (5) $Y = 3(s^2-9)^{-1} + 10s^{-3} + 3s^{-1}$; (6) $Y = 4s^{-3} - s^{-2} + 4s^{-1}$;
(7) $Y = (1/2)(s^{-1} + s(s^2+4)^{-1})$; (8) $Y = s((s-2)^2-9)^{-1}$; (9) $Y = s^{-1} - (s^2+4)^{-1}$;
(10) $Y = 5(1-e^{-3s})s^{-1}$; (11) $Y = e^{-s}(s^2+2)s^{-3}$; (12) $Y = (1+se^{-2\pi s})(s^2+1)^{-1}$;
(13) $Y = 2s^{-2}(1-e^{-5s})9s^{-1}e^{-5s}$.

(5)

(1) $y = (1/5)(e^{3t} + 4e^{-2t})$; (2) $y = 2e^{-t} - e^{-2t}$; (3) $y = e^t\text{sen}\,t$; (4) $y = \cosh t$;
(5) $y = (-1/3)(\cos(2t) - 4\cos t)$; (6) $y = (1/5)(e^{-t} - e^t\cos t + 7e^t\text{sen}\,t)$; (7) $y = x + \cos x + \text{sen}\,x$;
(8) $y = (1/4)(e^t + 3e^{3t} - 18te^{3t})$;

(7)

(1) $y = \text{sen}\,t - 2e^t + 2te^t$; (2) $y = e^{2x}(3\cos 2t + (7/2)\text{sen}\,2t)$; (3) $y = (1/3)e^{-2t}\text{sen}\,3t$;
(4) $y = (1/2)e^{-t/2}\cos t$; (5) $y = (1/3)\sinh(t/3)e^{2t/3}$; (6) $y = u_2(t)e^{t-2}\cos(t-2)$;
(7) $y = u_2(t)\sinh(2t-2)$; (8) $y = u_1(t)e^{2t-2}\cosh(t-1)$; (9) $y = (1/2)u_4(t)e^{(t-4)/2}$

(8)

(1) $Y = s^{-1}(1-e^{-s})$; (2) $Y = (s(1+e^{-s}))^{-1}$; (3) $Y = s^{-1}(1-e^{-s}+e^{-2s}-e^{-3s})$;
(4) $Y = (1+e^{-\pi s})(1+s^2)^{-1}(1-e^{-\pi s})^{-1}$; (5) $Y = (s(1+e^{-s}))^{-1}$; (6) $Y = (1-e^{-s})s^{-1}(1+e^{-s})^{-1}$;

(9)

(1) $y = 1 - \cos t - \text{sen}\,t - u_{\pi/2}(t)(1-\text{sen}\,t)$; (2) $y = (1/6)(1-u_{2\pi(t)})(2\text{sen}\,t - \text{sen}\,2t)$;
(3) $y = (1/6)(2\text{sen}\,t - \text{sen}\,2t) - (1/6)u_\pi(t)(2\text{sen}\,t + \text{sen}\,2t)$;
(4) $y = 1 - u_1(t)(1-e^{-(t-1)} - (t-1)e^{-(t-1)}$; (5) $y = e^{-t} - e^{-2t} + u_2(t)((1/2) - e^{-(t-2)} + (1/2)e^{-2(t-2)})$;
(6) $y = \cos t + u_\pi(t)(1+\cos t)$; (7) $y + \sum_{n=1}^\infty(-1)^n u_{n\pi}(t)(1-\cos(t-n\pi))$;
(8) $y = t - u_1(t)(t-1-\text{sen}\,(t-1))$; (9) $y = u_\pi(t)e^{-(t-\pi)}\text{sen}\,(t-\pi)$;
(10) $y = e^{-t}\cos t + e^{-t}\text{sen}\,t - u_\pi(t)e^{-(t-\pi)}\text{sen}\,t$; (11) $y = (1/2)\text{sen}\,2t(u_\pi(t) - u_{2\pi}(t))$;
(12) $y = 2te^{-t} + u_{2\pi}(t)(1-e^{-(t-2\pi)} - (t-2\pi)e^{-(t-2\pi)})$; (13) $y = \cosh t + 2u_1(t)\sinh(t-1)$;
(14) $y = (1+u_\pi(t))\text{sen}\,t$

(10)

(1) 3/25; (2) $\ln 3$; (3) 0; (4) $\pi/4$; (5) $(1/4)\ln 5$; (6) 3/50