Exercícios de Cálculo III - CM043

Prof. José Carlos Corrêa Eidam
DMAT/UFPR

Disponível no sítio `people.ufpr.br/ ~eidam/index.htm`

1o. semestre de 2012

Lista 1

☆ Sequências e séries de números reais

1. Decida se cada uma das sequências abaixo é convergente ou divergente, calculando o limite no caso convergente.

(1) $0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \frac{6}{7}, \ldots$
(2) $1, \frac{1}{2}, 1, \frac{1}{4}, 1, \frac{1}{8}, 1, \frac{1}{16}, \ldots$
(3) $\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{3}{4}, \frac{1}{8}, -\frac{7}{8}, \ldots$

(4) $a_n = \left(4 + \frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{2}}$
(5) $a_n = \frac{\sqrt{n}+1}{n-1}$, $n \geq 2$
(6) $a_n = \frac{n^3+3n+1}{4n^3+2}$

(7) $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$
(8) $a_n = \frac{n+(-1)^n}{n-(-1)^n}$
(9) $a_n = \frac{2n}{n+1} - \frac{n+1}{2n}$

(10) $a_n = n(\sqrt{n^2+1} - n)$
(11) $a_n = \frac{\operatorname{sen} n}{n}$
(12) $a_n = \operatorname{sen} n$

(13) $a_n = \frac{2n+\operatorname{sen} n}{5n+1}$
(14) $a_n = \frac{(n+3)!-n!}{(n+4)!}$
(15) $a_n = \sqrt[n]{n^2+n}$

(16) $a_n = \frac{n \operatorname{sen}(n!)}{n^2+1}$
(17) $a_n = \frac{3^n}{2^n+10^n}$
(18) $a_n = \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^n$

(19) $a_n = \frac{(n+1)^n}{n^{n+1}}$
(20) $a_n = na^n$, $a \in \mathbb{R}$
(21) $a_n = \frac{n!}{n^n}$

(22) $a_n = n - n^2 \operatorname{sen} \frac{1}{n}$
(23) $a_n = \sqrt[n]{a^n+b^n}$, $0 < a < b$
(24) $a_n = (-1)^n + \frac{(-1)^n}{n}$

(25) $a_n = \left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{n}\right)$
(26) $a_n = \frac{\sqrt{n}+\operatorname{sen}(2n!-7)}{n+3\sqrt{n}}$
(27) $a_n = \frac{1}{n} \cdot \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots(2n)}$

(28) $a_n = \sqrt[n]{n}$
(29) $a_n = \frac{n^\alpha}{e^n}$, $\alpha \in \mathbb{R}$
(30) $a_n = \frac{\ln n}{n^\alpha}$, $\alpha > 0$

(31) $a_n = \sqrt[n]{n!}$
(32) $a_n = \sqrt[n]{a}$, $a > 0$
(33) $a_n = \left(\frac{n-1}{n}\right)^n$

(34) $a_n = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}$
(35) $a_n = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{\sqrt{n}}$
(36) $a_n = \left(\frac{3n+5}{5n+11}\right)^n$

(37) $a_n = \left(\frac{3n+5}{5n+1}\right)^n \left(\frac{5}{3}\right)^n$
(38) $a_n = \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^n$
(39) $a_n = \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right)$

(40) $a_n = \frac{n}{\sqrt[n]{n!}}$
(41) $a_n = \frac{1}{n}\sqrt[n]{(n+1)(n+2)\cdot\ldots\cdot(2n)}$
(42) $a_n = \sqrt[n]{\frac{(2n)!}{n!^2}}$

(43) $a_n = \frac{n^2-1}{n^5+(-1)^n n^2}$
(44) $a_n = \sqrt[n]{n^4+2012n^3-5}$
(45) $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{1/n}$

(46) $a_n = \frac{n!^2}{n^{2n}}$
(47) $a_n = \frac{5^n}{2^n+3^n+4^n}$
(48) $a_n = \frac{n+\sqrt{2n+3}}{\sqrt[4]{n}+\sqrt[7]{17n-8}}$

(49) $a_n = \frac{3n^3-n^2+11n}{n^4-2n^3}$
(50) $a_n = \left(\frac{5n+7}{3n+8}\right)^{2n-4}$
(51) $a_n = \frac{(2n)!}{(n!)^2}$

2. Considere a sequência $a_1 = \sqrt{2}$, $a_2 = \sqrt{2\sqrt{2}}$, $a_3 = \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}, \ldots$

(a) Verifique que a sequência é crescente e limitada superiormente por 2.

(b) Calcule $\lim_{n\to\infty} a_n$.

3. Mostre que a sequência $\sqrt{2}, \sqrt{2+\sqrt{2}}, \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}, \ldots$ converge para 2.

4. Calcule $\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\cdots}}}$.

5. Neste exercício, estudaremos o crescimento das somas parciais da série harmônica.

(a) Sabemos que $\ln x = \int_1^x \frac{dt}{t}$, para qualquer $x > 0$. Interpretando a integral como área abaixo do gráfico, mostre que
$$1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} \leq 1 + \ln n,$$
para todo $n \geq 2$.

(b) Mostre que $\ln 10 < \frac{12}{5}$ e conclua que para qualquer $m \in \mathbb{N}$,
$$1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{10^m} \leq 1 + \frac{12m}{5}.$$
Isso mostra que, embora a série harmônica seja divergente, suas somas parciais crescem muito lentamente. (Por exemplo, $1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{10^{1000}} \leq 2401$.)

(c) Considere a sequência $x_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} - \ln n$, $n \geq 1$. Mostre que $\{x_n\}$ é uma sequência decrescente limitada inferiormente. O número
$$\gamma \doteq \lim_{n\to\infty} 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} - \ln n$$
é chamado de *constante de Euler-Mascheroni* e vale aproximadamente 0.57721.

6. Decida se cada uma das séries abaixo é convergente e calcule sua soma quando possível:

(1) $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{10^n} + 2^n\right)$ (2) $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k\, t^{\frac{k}{2}}$, $0 < t < 1$ (3) $\sum_{n=0}^{\infty} u^n(1+u^n)$, $|u| < 1$

(4) $\sum_{n=0}^{\infty} x^n \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)$, $|x| < 1$ (5) $\sum_{n=0}^{\infty} \operatorname{sen}^{2n} x$, $|x| < \frac{\pi}{2}$ (6) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{e^{n/2}}$

(7) $\sum_{n=1}^{\infty} \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)$ (8) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$ (9) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\operatorname{sen} n}$

(10) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{\sqrt{n+2012}}$ (11) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2+\cos n}{n}$ (12) $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{tg}\left(\frac{1}{n}\right)$

7. Verifique se cada uma das séries abaixo é convergente ou divergente, justificando sua resposta:

(1) $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2-4}}$ (2) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\arctan n}{n^2}$ (3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{\frac{1}{n}}}{n^2}$ (4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{(n!)^{\lambda}}$, $\lambda > 0$

(5) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{n!^2}$ (6) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$ (7) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{n+2}}{\sqrt[4]{n^3+3}\,\sqrt[5]{n^3+5}}$ (8) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^{\ln n}}$

(9) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \cos\frac{1}{n}\right)$ (10) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln\ n)^n}$ (11) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln\ n}{n^2}$ (12) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{n^p}$, $p > 0$

(13) $\sum_{n=2}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n^p}\right)$, $p > 0$ (14) $\sum_{n=2}^{\infty} \sqrt{n} \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$ (15) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!3^n}{n^n}$ (16) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!e^n}{n^n}$

(17) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{\frac{1}{n}}}{n^n}$ (18) $\sum_{n=1}^{\infty} 3^n \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$ (19) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{(\ln 2)^n}$ (20) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\arctan n)^n}$

(21) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+2}{(n+1)^3}$ (22) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt[n]{2}-1\right)$ (23) $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{n}\right)$ (24) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1+2^n}{1+3^n}$

(25) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{(1+n^2)^p}$, $p>0$ (26) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+\sqrt[17]{n}}$ (27) $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2n+1}{3n+4}\right)^n$ (28) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} 4n}{4^n}$

(29) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^p}$, $p>0$ (30) $\sum_{n=1}^{\infty} \ln(\cos(1/n))$ (31) $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{n^2+1}{2n^2+1}\right)^n$ (32) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$

(33) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n\ln n)^p}$, $p>0$ (34) $\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt{1+n^2}-n)$ (35) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^p e^n}$, $p>0$ (36) $\sum_{n=0}^{\infty} e^{-n} n!$

(37) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^p}$, $p>0$ (38) $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{n\sqrt[4]{n^3+6}}\right)$ (39) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[8]{n^7+3n^3-2}}{\sqrt[6]{n^9+7n^2}}$ (40) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2 2^n}{n!}$

(41) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^p}{e^{-an}}$, $a,p>0$ (42) $\sum_{n=1}^{\infty} a^n n^p$, $a,p>0$ (43) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)^n}{n^{2n}}$ (44) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$

(45) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+1/n}}$ (46) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{2012} e^{-n/3}$ (47) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+n+n^2}{\sqrt{1+n^2+n^6}}$ (48) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}}$

8. Classifique as séries abaixo absolutamente convergentes, condicionalmente convergentes ou divergentes:

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}}$ (2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^{\frac{3}{2}}}$ (3) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{2n^2+1}{n^3+3}$ (4) $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{\ln\ n}$

(5) $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n \frac{\ln n}{n}$ (6) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n(\ln n)^2}$ (7) $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n \frac{\sqrt{n}}{\ln n}$ (8) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{2n+1} \frac{1}{\sqrt{n}}$

(9) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \operatorname{sen} \frac{1}{n^p}$, $p>0$ (10) $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n \frac{\ln n}{n^2}$ (11) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{\ln n}{\sqrt{n}}$ (12) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n^n}{(n+1)^{n+1}}$

(13) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(1+n^2)^p}$, $p>0$ (14) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(\ln n)^p}$, $p>0$ (15) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{\sqrt{n}}{n+1}$ (16) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n! e^{-n}$

(17) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{\ln n}{n^p}$, $p>0$ (18) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{2\cdot 4\cdot \ldots (2n)}{3\cdot 5\cdot (2n+1)}$ (19) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+\sqrt[3]{n^2+3n}}$ (20) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \operatorname{sen}\left(\frac{1}{n}\right)$

(21) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{10^n n!}$ (22) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{\sqrt{n}}{1+7\sqrt{n+2}}$ (23) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n\pi)}{n^{3/4}}$ (24) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n!}{2\cdot 5\cdot \ldots \cdot (3n+2)}$

(25) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n \operatorname{tg}(1/n)$ (26) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n n!}{e^{n^2}}$ (27) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{\operatorname{sen}(7n)}{9+5^n}$ (28) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{5^n}{3^n+4^n}$

(29) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{4^n+5^n}$ (30) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^n}{n^{4n}}$ (31) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{\sqrt{n}}{n+4}$ (32) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{\cos(n!)}{\sqrt[3]{n^4+\operatorname{sen} n}}$

✰ Séries de potências

9. Determine o intervalo máximo de convergência de cada uma das séries de potências abaixo:

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{4^n} x^n$ (2) $\sum_{n=1}^{\infty} n!\, x^n$ (3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^3+1}$ (4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3n)!}{(2n)!} x^n$

(5) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(x-5)^n}{n3^n}$ (6) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{(n+1)\ln^2(n+1)}$ (7) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10^n}{(2n)!}(x-7)^n$ (8) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{e^n}(x-e)^n$

(9) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}(x+3)^n$ (10) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(x-3)^n}{(2n+1)\sqrt{n+1}}$ (11) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{4^n}(x-4)^{2n}$ (12) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n(\ln n)^2}\, x^n$

(13) $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n x^{n^2}$ (14) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n4^n} x^n$ (15) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2} x^n$ (16) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2} x^{2n}$

(17) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2} x^{n^2}$ (18) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} x^n$ (19) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} x^{3n}$ (20) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} x^{n!}$

(21) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(2+(-1)^n)^n}$ (22) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{a^n+b^n}$, $b > a > 0$ (23) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2^n+3}{3^n+2}\right) x^n$ (24) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n+2}{5n+7}\right)^n x^n$

(25) $\sum_{n=1}^{\infty} (\operatorname{sen} n) x^n$ (26) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(3+(-1)^n)^n} x^n$ (27) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{1\cdot 3\cdot \ldots \cdot (2n-1)} x^n$ (28) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2\cdot 4\cdot \ldots \cdot (2n)} x^n$

10. Suponha que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ converge quando $x = -4$ e diverge quando $x = 6$. O que pode ser dito sobre a convergência ou divergência das séries a seguir?

    (a) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ (b) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n 8^n$ (c) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(-3)^n$ (d) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n 9^n$

11. Usando derivação e integração termo a termo, calcular as somas das séries de potências:

    (1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ (2) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$ (3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{2n-1}$ (4) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1}$

    (5) $\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n$ (6) $\sum_{n=1}^{\infty} nx^n$ (7) $\sum_{n=1}^{\infty} nx^{2n-1}$ (8) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n(n-1)}$

    (9) $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^{n-1}$ (10) $\sum_{n=1}^{\infty} n^3 x^n$ (11) $\sum_{n=0}^{\infty} (n+4)x^n$ (12) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{4n}}{4n}$

12. Use as séries do exercício anterior para calcular:

    (a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n}$ (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{2^n}$ (c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{5^n(n-1)}$

13. Determine as expansões em séries de potências em torno de $x_0 = 0$ das seguintes funções e os valores de x para os quais essas expansões são válidas:

    (a) $\frac{1}{(1+x)^2}$ (b) $\frac{1}{(1+x)^3}$ (c) $\frac{2x}{1+x^4}$ (d) $\ln(1+x)$ (e) $\ln\left(\frac{1}{1+3x^2}\right)$

14. Verifique que

    (a) $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$, $x \in \mathbb{R}$ (b) $\operatorname{sen} x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$, $x \in \mathbb{R}$

    (c) $\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$, $x \in \mathbb{R}$ (d) $\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = 2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$, $|x| < 1$

    (e) $\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$, $|x| \le 1$ (f) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{6} x^n = \frac{1}{(1-x)^4}$, $x \neq 1$

15. Utilizando as séries do exercício anterior, obtenha um valor aproximado de:

    (a) e, com erro inferior a 10^{-5}.

    (b) $\operatorname{sen} 1$, com erro inferior a 10^{-5} e a 10^{-7}.

    (c) $\ln 2$ e $\ln 3$, com erro inferior a 10^{-5}.

(d) $\arctan(1/2)$ e $\arctan(1/3)$, com erro inferior a 10^{-5}.

(e) $\pi/4$, com erro inferior a 10^{-5}, usando que $\pi/4 = \arctan(1/2) + \arctan(1/3)$, (esta igualdade segue da identidade $\operatorname{tg}(x+y) = \frac{\operatorname{tg}(x)+\operatorname{tg}(y)}{1-\operatorname{tg}(x)\operatorname{tg}(y)}$

16. Calcule $\frac{d^{320}\arctan}{dx^{320}}(0)$ e $\frac{d^{321}\arctan}{dx^{321}}(0)$

17. Desenvolva em série de potências de x as seguintes funções, indicando os intervalos de convergência:

(a) $f(x) = x^2 e^x$ (b) $f(x) = \cos\sqrt{x}$ (c) $f(x) = \operatorname{sen}(x^2)$

(d) $f(x) = \cos^2 x$ (e) $f(x) = \int_0^x \frac{\operatorname{sen} t}{t}\,dt$ (f) $f(x) = \int_0^x e^{-t^2}\,dt$

(g) $f(x) = \int_0^x \frac{\ln(1+t)}{t}\,dt$ (h) $f(x) = \int_0^x \operatorname{sen}(t^2)\,dt$ (i) $f(x) = \frac{e^{x^2}-1}{x}$

18. Utilizando a expansão em série de potências das funções envolvidas, calcule os seguintes limites:

(a) $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x}$ (b) $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2}$ (c) $\lim_{x\to 0} \frac{x-\operatorname{sen} x}{x^3}$ (d) $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x}$

(e) $\lim_{x\to 0} \frac{\arctan x}{x}$ (f) $\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x}$ (g) $\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^3}-1}{x^2}$ (h) $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)-\ln(1-x)}{x}$

✰ Respostas

(1)

- (2), (3), (12), (24), (39) são divergentes;
- (5), (7), (11), (14), (16), (17), (19), (21), (22), (25), (26), (27), (29), (30), (36), (43), (46), (49) convergem para zero;
- (1), (8), (15), (28), (32), (35), (38), (44), (45) convergem para 1;
- (31), (34), (47), (48), (50), (51) divergem para $+\infty$;
- (4) converge para 2; (6) converge para $1/4$; (9) converge para $3/2$; (10) converge para $1/2$; (13) converge para $2/5$; (18) converge para e; (20) diverge se $a < 0$, diverge para $+\infty$ se $a \geq 1$ e converge para zero se $0 \leq a < 1$; (23) converge para b; (33) converge para $1/e$; (37) converge para $e^{22/15}$; (40) converge para e; (41) converge para $4/e$; (42) converge para 4.

(2) $\lim_{n\to\infty} a_n = 2$; **(4)** A sequência converge para 2;

(6) (1) diverge; (2) converge para $\frac{1}{1+\sqrt{t}}$; (3) converge para $\frac{1}{1-u} + \frac{1}{1-u^2}$; (4) converge para $\frac{1}{1+x^2}$; (5) converge para $\sec^2 x$; (6) converge para $\frac{1}{\sqrt{e}-1}$; as demais são todas divergentes.

(7) (1), (5), (6), (14), (15), (16), (18), (19), (22), (23), (26), (34), (36),(39), (45), (47) são divergentes; (12), (13), (25), (29), (33) convergem se e somente se $p > 1$; (35) converge para qualquer valor de $p > 0$; (42) converge se e só se $0 \leq a < 1$; (37) diverge para qualquer $p > 0$; as demais são todas convergentes.

(8) (2), (6), (10), (12), (18), (21), (23), (24), (26), (27), (29), (32) são absolutamente convergentes; (1), (3), (4), (5), (8), (11), (15), (19), (20), (31) são condicionalmente convergentes; (5), (9), (17) são absolutamente convergentes para $p > 1$ e condicionalmente convergentes se $0 < p \leq 1$; (14) é condicionalmente convergente para qualquer valor de $p > 0$; as demais são divergentes.

(9) (1) $(-4,4)$; (2) $\{0\}$; (3) $[-1,1]$; (4) $\{0\}$; (5) $(2,8]$; (6) $[-2,0)$; (7) $(-\infty,+\infty)$; (8) $(0,2e)$; (9) $(-3-e,-3+e)$; (10) $[2,4]$; (11) $[3,5]$; (12) $(-1,1]$; (13) $(-1,1)$; (14) $[-4/3,4/3)$; (15) $(-1/4,1/4)$; (16) $(-1/2,1/2)$; (17) $(-1,1)$; (18) $(-e,e)$; (19) $(-\sqrt[3]{e},\sqrt[3]{e})$; (20) $[-1,1]$; (21) $(-1,1)$; (22) $(-1-b,-1+b)$; (23) $(-3/2,3/2)$; (24) $(-5/3,5/3)$; (25) $(-1,1)$; (26) $(-2,2)$; (27) $\{0\}$; (28) $(-\infty,+\infty)$.

(10) (a), (c) convergem e (b), (d) divergem.

(11) (1) $-\ln(1-x)$; (2) $\ln(1+x)$; (3) $\ln\left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right)$; (4) $\arctan x$; (5) $\frac{1}{(1-x)^2}$; (6) $\frac{x}{(1-x)^2}$; (7) $\frac{x}{(1-x^2)^2}$; (8) $(1+x)\ln(1+x)-x$; (9) $\frac{1+x}{(1-x)^3}$; (10) $\frac{x+4x^2+x^3}{(1-x)^4}$; (11) $\frac{4-3x}{(1-x)^2}$; (12) $\frac{-1}{4}\ln(1-x^4)$.

(12) (a) $\ln 2$; (b) $\frac{3}{128}$; (c) $\frac{6}{5}\ln\frac{6}{5}-\frac{1}{5}$.

(13) (a) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}(n+1)x^n$, $|x|<1$; (b) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(n+1)(n+2)}{1}x^n$, $|x|<1$; (c) $\sum_{n=0}^{\infty}2(-1)^n x^{4n+1}$, $|x|<1$; (d) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}x^n$, $|x|<1$; (e) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 3^n}{n}x^{2n}$, $|x|<1$.

(17) (a) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+2}}{n!}$, $x\in\mathbb{R}$; (b) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^n}{(2n)!}$, $x\in\mathbb{R}$; (c) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{4n+2}}{(2n+1)!}$, $x\in\mathbb{R}$; (d) $1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 2^{2n-1}}{(2n)!}x^{2n}$, $x\in\mathbb{R}$; (e) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^2(2n)!}x^{2n+1}$, $x\in\mathbb{R}$; (f) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)n!}x^{2n+1}$, $x\in\mathbb{R}$; (g) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}x^n$, $|x|<1$; (h) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!(4n+3)}x^{4n+3}$, $x\in\mathbb{R}$; (i) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{n!}$, $x\in\mathbb{R}$.

Parte 2

☆ Série de Taylor

1. Usando derivação e integração termo a termo, calcular as somas das séries de potências:

   (1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ (2) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$ (3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{2n-1}$ (4) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1}$

   (5) $\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n$ (6) $\sum_{n=1}^{\infty} nx^n$ (7) $\sum_{n=1}^{\infty} nx^{2n-1}$ (8) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n(n-1)}$

   (9) $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^{n-1}$ (10) $\sum_{n=1}^{\infty} n^3 x^n$ (11) $\sum_{n=0}^{\infty}(n+4)x^n$ (12) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{4n}}{4n}$

2. Use as séries do exercício anterior para calcular:

   (a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n}$ (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{2^n}$ (c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{5^n(n-1)}$

3. Determine as expansões em séries de potências em torno de $x_0 = 0$ das seguintes funções e os valores de x para os quais essas expansões são válidas:

   (a) $\frac{1}{(1+x)^2}$ (b) $\frac{1}{(1+x)^3}$ (c) $\frac{2x}{1+x^4}$ (d) $\ln(1+x)$ (e) $\ln\left(\frac{1}{1+3x^2}\right)$

4. Verifique que

   (a) $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$, $x \in \mathbb{R}$ (b) $\operatorname{sen} x = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$, $x \in \mathbb{R}$

   (c) $\cos x = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$, $x \in \mathbb{R}$ (d) $\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = 2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$, $|x| < 1$

   (e) $\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$, $|x| \leq 1$ (f) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{6} x^n = \frac{1}{(1-x)^4}$, $|x| < 1$

5. Utilizando as séries do exercício anterior, obtenha um valor aproximado de:

   (a) e, com erro inferior a 10^{-5}.
   (b) $\operatorname{sen} 1$, com erro inferior a 10^{-5} e a 10^{-7}.
   (c) $\ln 2$ e $\ln 3$, com erro inferior a 10^{-5}.
   (d) $\arctan(1/2)$ e $\arctan(1/3)$, com erro inferior a 10^{-5}.
   (e) $\pi/4$, com erro inferior a 10^{-5}, usando que $\pi/4 = \arctan(1/2) + \arctan(1/3)$, (esta igualdade segue da identidade $\operatorname{tg}(x+y) = \frac{\operatorname{tg}(x)+\operatorname{tg}(y)}{1-\operatorname{tg}(x)\operatorname{tg}(y)}$

6. Calcule $\frac{d^{320}\arctan}{dx^{320}}(0)$ e $\frac{d^{321}\arctan}{dx^{321}}(0)$

7. Desenvolva em série de potências de x as seguintes funções, indicando os intervalos de convergência:

   (a) $f(x) = x^2 e^x$ (b) $f(x) = \cos\sqrt{x}$ (c) $f(x) = \operatorname{sen}(x^2)$

   (d) $f(x) = \cos^2 x$ (e) $f(x) = \int_0^x \frac{\operatorname{sen} t}{t} dt$ (f) $f(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt$

   (g) $f(x) = \int_0^x \frac{\ln(1+t)}{t} dt$ (h) $f(x) = \int_0^x \operatorname{sen}(t^2)\, dt$ (i) $f(x) = \frac{e^{x^2}-1}{x}$

8. Utilizando a expansão em série de potências das funções envolvidas, calcule os seguintes limites:

   (a) $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x}$ (b) $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2}$ (c) $\lim_{x\to 0} \frac{x-\operatorname{sen} x}{x^3}$ (d) $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x}$

   (e) $\lim_{x\to 0} \frac{\arctan x}{x}$ (f) $\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x}$ (g) $\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^3}-1}{x^2}$ (h) $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)-\ln(1-x)}{x}$

☆ Equações diferenciais de primeira ordem

9. Determine as soluções das equações diferenciais de 1a. ordem abaixo:

   (a) $y' = y^2$ (b) $xy' = y$
   (c) $yy' = x$ (d) $y' = (1-y)(2-y)$
   (e) $(x+3y) - x\frac{dy}{dx} = 0$ (f) $y' = 2y + e^x$

10. Determine as soluções das equações abaixo com condições iniciais dadas:

    (a) $y' = x + y,\ y(0) = 1$ (b) $(\cos t)x' - (\operatorname{sen} t)x = 1,\ x(2\pi) = \pi$
    (c) $y' = x(1+y),\ y(0) = -1$

11. Determine duas soluções distintas para cada uma das equações com a condição inicial dada:

    (a) $y' = 5y^{4/5},\ y(0) = 0$ (b) $y' = 3\sqrt[3]{y^2}(3x^2+1),\ y(0) = 0$

12. Resolva as equações:

    (a) $y' = e^{x-2y}$ (b) $x^2y^2\frac{dy}{dx} = 1 + x^2$
    (c) $y' \operatorname{sen} x + y\cos x = 1$ (d) $y' = x^3 - 2xy$
    (e) $\left(3x^2 \operatorname{tg} y - \frac{2y^3}{x^3}\right) + \left(x^3\sec^2 y + 4y^3 + \frac{3y^2}{x^2}\right)y' = 0$ (f) $(1-xy) + (xy - x^2)\frac{dy}{dx} = 0$
    (g) $xy' = y + \sqrt{x^2+y^2}$ (h) $(1+t^2)y' + ty + (1+t^2)^{5/2} = 0$
    (i) $\frac{dr}{d\theta} = \sec^2\theta\sec^3 r$ (j) $3t^2x' = 2x(x-3)$
    (k) $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + \cos^2\left(\frac{y}{x}\right)$ (l) $(1-xy)y' = y^2$
    (m) $xy' = \sqrt{x^2+y^2},\ x > 0$ (n) $y' = \frac{x+2y}{x}$
    (o) $y' = \frac{y^2-2xy}{x^2}$ (p) $y' = \frac{y^2}{xy+y^2}$
    (q) $y' = y\ln x$ (r) $y' = x - y$

13. Resolva as seguintes equações de Bernoulli:

    (a) $y(6x^2y^2 - x + 1) + 2xy' = 0$ (b) $y' = y + e^{-3x}y^4$
    (c) $2x^3y' = y(y^2 + 3x^2)$ (d) $x^3y' = 2y(\sqrt[3]{y} + 3x^2)$
    (e) $y' = 5y - \frac{4x}{y}$ (f) $y' = y - y^3$
    (g) $x^2y' + 2xy - y^3 = 0$ (h) $y' = y - y^2$

14. Resolva as equações:

    (a) $(x+y)dx + x\,dy = 0$ (b) $(xe^y + y - x^2)dy = (2xy - e^y - x)dx$
    (c) $\cos\ x\,dy = (1 - y - \operatorname{sen} x)dx$ (d) $y(x^2+y^2)dx + x(3x^2 - 5y^2)dy = 0$
    (e) $(x^2+y^2)dx + (x^3 + 3xy^2 + 2xy)dy = 0$ (f) $dx + \cos y\,dy = 0$
    (g) $(y - x^3)dx + (y^3 + x)dy = 0$ (h) $(3x^2 + y)dx + (x+4)dy = 0$
    (i) $(x+2y)dx + (2x+1)dy = 0$ (j) $y' = \frac{3x^2-y}{x-3y^2}$
    (k) $(2x + \operatorname{sen} y)dx + x\cos y\,dy = 0$ (l) $(3y^2 - x^2 + 1)dx + 2xy = 0$
    (m) $(xy^2 + 2)dx + 3x^2y = 0$ (n) $(2x + 3y)dx + x^3dy = 0$
    (o) $e^{x+y^2}dx + 2ye^{x+y^2}dy = 0$

15. Fatores integrantes:

(a) Determine todas as funções f que tornam exata a equação diferencial $(y^2 \operatorname{sen} x)dx + yf(x)dy = 0$.

(b) A equação $g(x)dy + (y+x)dx = 0$ tem $h(x) = x$ como fator integrante. Determine todas as possíveis funções g.

(c) A equação $e^x \sec y - \operatorname{tg} y + y' = 0$ tem um fator integrante da forma $f(x, y) = e^{ax} \cos y$. Determine a e resolva a equação.

(d) Determine um fator integrante da forma $h(x, y) = x^n y^m$ para a equação

$$y(y^2+1)dx + x(y^2-1)\ln x dy = 0$$

e resolva-a.

(e) Determine um fator integrante da forma $\mu = \mu(x + y^2)$ para a equação

$$(3x+2y+y^2)dx + (x+4xy+5y^2)dy = 0\,.$$

(f) Determine um fator integrante da forma $\mu = \mu(x^2 + y^2)$ para a equação

$$xdx + ydy + x(xdy - ydx) = 0\,.$$

16. Determine uma função $y = f(x)$ definida em um intervalo I, cujo gráfico passe pelo ponto $(0, 5/4)$ e tal que para todo $t > 0$, $t \in I$, o comprimento do gráfico de $y = f(x)$, $0 \le x \le t$, seja igual à área do conjunto $0 \le y \le f(x)$, $0 \le x \le t$.

✰ Equações diferenciais lineares de segunda ordem com coeficientes constantes

17. Resolva as equações diferenciais abaixo:

(a) $y'' + 2y' + y = 0$ (b) $y'' - 4y' + 4y = 0$ (c) $y''' - y'' + y' - y = 0$
(d) $2y'' - 4y' - 8y = 0$ (e) $y'' - 9y' + 20y = 0$ (f) $2y'' + 2y' + 3y = 0$
(g) $y''' - 3y'' + 3y' - y = 0$ (h) $y^{(iv)} + y = 0$ (i) $y^{(v)} + 2y''' + y' = 0$
(j) $y'' - 2y' + 2y = 0$ (k) $y'' + 4y = 0$ (l) $y'' + 4y' + 5y = 0$

☆ **Respostas** (C denota qualquer constante real)

(1) (1) $-\ln(1-x)$; (2) $\ln(1+x)$; (3) $\ln\left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right)$; (4) $\arctan x$; (5) $\frac{1}{(1-x)^2}$; (6) $\frac{x}{(1-x)^2}$; (7) $\frac{x}{(1-x^2)^2}$; (8) $(1+x)\ln(1+x)-x$; (9) $\frac{1+x}{(1-x)^3}$; (10) $\frac{x+4x^2+x^3}{(1-x)^4}$; (11) $\frac{4-3x}{(1-x)^2}$; (12) $\frac{-1}{4}\ln(1-x^4)$.

(2) (a) $\ln 2$; (b) $\frac{3}{128}$; (c) $\frac{6}{5}\ln\frac{6}{5}-\frac{1}{5}$.

(3) (a) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}(n+1)x^n$, $|x|<1$; (b) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(n+1)(n+2)}{1}x^n$, $|x|<1$; (c) $\sum_{n=0}^{\infty}2(-1)^n x^{4n+1}$, $|x|<1$; (d) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}x^n$, $|x|<1$; (e) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 3^n}{n}x^{2n}$, $|x|<1$.

(7) (a) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+2}}{n!}$, $x\in\mathbb{R}$; (b) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^n}{(2n)!}$, $x\in\mathbb{R}$; (c) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{4n+2}}{(2n+1)!}$, $x\in\mathbb{R}$; (d) $1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 2^{2n-1}}{(2n)!}x^{2n}$, $x\in\mathbb{R}$; (e) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^2(2n)!}x^{2n+1}$, $x\in\mathbb{R}$; (f) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)n!}x^{2n+1}$, $x\in\mathbb{R}$; (g) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}x^n$, $|x|<1$; (h) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!(4n+3)}x^{4n+3}$, $x\in\mathbb{R}$; (i) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{n!}$, $x\in\mathbb{R}$.

(9) (a) $y\equiv 0$ e $y=\frac{1}{C-x}$; (b) $y=Cx$; (c) $y=\pm\sqrt{x^2+C}$; (d) $y\equiv 1$, $y\equiv 2$, $y=\frac{Ce^x-2}{Ce^x-1}$; (e) $y=Cx^3-\frac{x}{2}$; (f) $y=Ce^{2x}-e^x$

(10) (a) $y=2e^x-x-1$; (b) $x=\frac{t-\pi}{\cos t}$; (c) $y\equiv -1$; **(11)** (a) $y\equiv 0$ e $y=x^5$; (b) $y\equiv 0$ e $y=(x^3+x)^3$

(12) (a) $y=\frac{1}{2}\ln(2e^x+C)$; (b) $y=\sqrt[3]{\frac{3x^2-3-Cx}{x}}$; (c) $y=\frac{x+C}{\operatorname{sen}x}$; (d) $y=\frac{1}{2}(x^2-1)+Ce^{-x^2}$; (e) $x^3tg\ y+y^4+\frac{y^3}{x^2}=C$; (f) $y^2-2xy+\ln(x^2)=C$; (g) $y\pm\sqrt{x^2+y^2}=\pm x^2$; (h) $y=\frac{C-15t-10t^3-3t^5}{15\sqrt{1+t^2}}$; (i) $3\operatorname{sen}r-\operatorname{sen}^3 r=3\operatorname{tg}\theta+C$; (j) $x\equiv 0$, $x\equiv 3$ e $x=\frac{3}{1-Ce^{-2/t}}$; (k) $\operatorname{tg}\left(\frac{y}{x}\right)=\ln|x|+C$; (l) $xy-\ln|y|=C$; (m) $\frac{y^2+y\sqrt{x^2+y^2}}{x^2}+\ln\left|\frac{y+\sqrt{x^2+y^2}}{x^3}\right|=C$; (n) $y=Cx^2-x$; (o) $y=\frac{3x}{1-Cx^3}$; (p) $y+x\ln|y|=Cx$; (q) $y=C(x/e)^x$ (r) $y=(x-1)+Ce^{-x}$;

(13) (a) $y\equiv 0$, $y^2=\frac{1}{6x+Cxe^{-x}}$; (b) $y\equiv 0$, $y=\frac{e^x}{\sqrt[3]{C-3x}}$; (c) $y\equiv 0$, $y^2=\frac{x^3}{C-x}$; (d) $y\equiv 0$, $y=\frac{27x^6}{(C-\ln(x^2))^3}$; (e) $y=Ce^{10x}+\frac{20x+2}{25}$; (f) $y=\pm(Ce^{-2x}+1)^{-1/2}$; (g) $y=(2/5x+Cx^4)^{-1/2}$; (h) $y=(1+Ce^{-x})^{-1}$

(14) (a) $x^2+2xy=C$; (b) $x^2+y^2+2xe^y-2x^2y=C$; (c) $y=\frac{x+C}{\sec x+\operatorname{tg}x}$; (d) $y^3(x^2-y^2)=Cx$; (e) $x^3+3xy^2=Ce^{-3y}$; (f) $y=\arcsin(C-x)$; (g) $4xy-x^4-y^4=0$; (h) $y=\frac{C-x^3}{x+4}$; (i) $y=\frac{x^2+C}{2(1-2x)}$; (j) $xy-x^3-y^3=C$; (k) $y=\arcsin\left(\frac{C-x^2}{x}\right)$; (l) $15x^3y^2-3x^5+5x^3=C$; (m) $x^{2/3}y^2+2x^{2/3}=C$; (n) $y=\frac{C-x^4}{2x^3}$; (o) $y=\pm\sqrt{C-x}$;

(15) (a) $f(x)=C-2\cos x$; (b) $g(x)=\frac{x}{2}+\frac{C}{x}$; (c) $a=-1$, $x+e^{-x}\operatorname{sen}y=C$; (d) $n=-1$, $m=-2$, $(y^2+1)\ln x=Cy$ e $y\equiv 0$; (e) $\mu(x+y^2)=x+y^2$; (f) $\mu=(x^2+y^2)^{-3/2}$

(16) $y=\frac{e^{-x}+4e^x}{4}$

(17) (a) $y=C_1e^{-x}+C_2xe^{-x}$; (b) $y=C_1e^{2x}+C_2xe^{2x}$; (c) $y=C_1e^x+C_2\operatorname{sen}x+C_3\cos x$; (d) $y=e^x(C_1\operatorname{sen}(\sqrt{3}x)+C_2\cos(\sqrt{3}x))$; (e) $y=C_1e^{5x}+C_2e^{4x}$; (f) $y=e^{-x/2}(C_1\operatorname{sen}(\frac{\sqrt{3}}{2}x)+C_2\cos(\frac{\sqrt{3}}{2}x))$; (g) $y=C_1e^x+C_2xe^x+C_3x^2e^x$; (h) $y=C_1\cos(\frac{\sqrt{2}}{2}x)+C_2\operatorname{sen}(\frac{\sqrt{3}}{2}x)$; (i) $y=C_1+(C_2+C_3x)\cos x+(C_4+C_5x)\operatorname{sen}x$; (j) $y=C_1e^x\cos x+C_2e^x\operatorname{sen}x$; (k) $y=C_1\operatorname{sen}(2x)+C_2\cos(2x)$; (l) $y=C_1e^{-2x}\cos x+C_2e^{-2x}\operatorname{sen}x$.

Parte 3

✰ Equações diferenciais lineares de segunda ordem

1. Resolva as equações diferenciais abaixo:

   (a) $y'' + 2y' + y = 0$ (b) $y'' - 4y' + 4y = 0$ (c) $y''' - y'' + y' - y = 0$
   (d) $2y'' - 4y' - 8y = 0$ (e) $y'' - 9y' + 20y = 0$ (f) $2y'' + 2y' + 3y = 0$
   (g) $y''' - 3y'' + 3y' - y = 0$ (h) $y^{(iv)} + y = 0$ (i) $y^{(v)} + 2y''' + y' = 0$
   (j) $y'' - 2y' + 2y = 0$ (k) $y'' + 4y = 0$ (l) $y'' + 4y' + 5y = 0$

2. Verifique que y_1 é solução da equação dada e determine, a partir de y_1, outra solução y_2 da equação, de forma que o conjunto $\{y_1(x), y_2(x)\}$ seja linearmente independente.

   (a) $x^2y'' + xy' - 4y = 0,\ y_1 = x^2$ (b) $(1-x^2)y'' + 2xy' - 2y = 0,\ y_1 = x$
   (c) $y'' - \dfrac{x}{x-1}y' + \dfrac{1}{x-1}y = 0,\ y_1 = x$ (d) $x^2y'' + 2xy' - 2y = 0,\ y_1 = x$
   (e) $xy'' + 3y' = 0,\ y_1 = 1$ (f) $x^2y'' + xy' + \left(x^2 - \dfrac{1}{4}\right)y = 0,\ y_1 = x^{-1/2}$
   (g) $xy'' - (2x+1)y' + (x+1)y = 0,\ y_1 = e^x$ (h) $y'' - 4y' + 12y = 0,\ y_1 = e^{6x}$
   (i) $x^2y'' + 2xy' = 0,\ y_1 = 1$ (j) $x^2y'' + 3xy' + y = 0,\ y_1 = x^{-1}$
   (k) $x^2y'' - x(x+2)y' + (x+2)y = 0;\ y_1 = x$ (l) $(1-x^2)y'' - 2xy' + 6y = 0;\ y_1 = 3x^2 - 1$

3. Considere a equação diferencial

$$xy'' - (x+n)y' + ny = 0,$$

   onde n é um inteiro não-negativo.

   (a) Mostre que $y_1 = e^x$ é solução da equação.
   (b) Mostre que $y_2 = Ce^x \int x^n e^{-x}\,dx$, $C \in \mathbb{R}$, é uma solução da equação dada e $\{y_1, y_2\}$ é linearmente independente.
   (c) Estude os casos $n = 1$ e $n = 2$.

4. Resolva as seguintes equações de Euler em $(0, +\infty)$:

   (a) $x^2y'' + xy' + y = 0$ (b) $x^2y'' - 3xy' + 4y = 0$ (c) $x^2y'' + 3xy' + 10y = 0$
   (d) $2x^2y'' + 10xy' + 3y = 0$ (e) $x^2y'' + 2xy' - 12y = 0$ (f) $2x^2y'' + 3xy' - y = 0$
   (g) $x^2y'' + 5xy' + 4y = 0$ (h) $x^2y'' + xy' + y = 0$ (i) $x^2y'' + 4xy' + 2y = 0$
   (j) $x^2y'' - xy' + y = 0$ (k) $x^2y'' + 3xy' + 5y = 0$ (l) $2x^2y'' - 4xy' + 6y = 0$
   (m) $x^2y'' - 5xy' + 9y = 0$ (n) $x^2y'' + 2xy' + 4y = 0$ (o) $x^2y'' - 2y = 0$

5. Determine a solução geral das seguintes equações lineares de segunda ordem não-homogêneas:

   (a) $y'' + 2y' + y = e^{-x}\ln x$ (b) $y'' - 2y' - 3y = 64xe^{-x}$ (c) $y'' + 2y' + 5y = e^{-x}\sec 2x$
   (d) $y'' - 2y' = 12x - 10$ (e) $y'' + y = 2\cos x$ (f) $y'' + 2y' + y = 3e^{-x}$
   (g) $y'' + 2y' + 2y = e^{-x}\operatorname{sen} x$ (h) $y'' + 4y = 3\operatorname{sen} x$ (i) $y'' + 10y' + 25y = 14e^{-5x}$
   (j) $y'' - 4y = x^2e^{2x}$ (k) $y'' + y' - 2y = 8\operatorname{sen} x$ (l) $y'' - 3y' = x + \cos x$
   (m) $y'''' - 2y''' + y'' = x^3$ (n) $y''' - y = x^3 - 1$ (o) $y'' - 2y = 2e^x(\cos x - \operatorname{sen} x)$
   (p) $y'' - 3y' - 4y = 2\operatorname{sen} x$ (q) $y'' - 3y' - 4y = 4x^2$ (r) $y'' - 5y' + 6y = 2e^x$
   (s) $y'' + 9y = 9\sec^2(3x)$ (t) $y'' + y = \operatorname{tg} x$ (u) $y'' - 4y' + 4y = \frac{e^{-2x}}{x^2}$
   (v) $y'' + 4y = \operatorname{cossec} 2x$ (w) $y'' + y = \sec x$ (x) $y'' - 3y' + 2y = e^x\operatorname{sen} x$
   (y) $xy'' - y' = 3x^2$ (z) $x^2y'' + xy' - y = x^2$

6. Determine a solução geral das seguintes equações lineares de segunda ordem não-homogêneas (com coeficientes variáveis):

(a) $(x^2-1)y''-2xy'+2y=(x^2-1)^2$ (b) $x^2y''-2xy'+2y=4x^2$
(c) $x^2y''+7xy'+5y=x$ (d) $x^2y''-x(x+2)y'+(x+2)y=0$
(e) $xy''-(1+x)y'+y=x^2e^{2x}$ (f) $x^2y''+xy'+(x^2-\frac{1}{4})y=3x^{3/2}\operatorname{sen}x$ (Use o exercício 1(f))

7. (Princípio de superposição) Se y_1 e y_2 são soluções de $y''+f(x)y'+g(x)y=h_1$ e $y''+f(x)y'+g(x)y=h_2$, respectivamente, mostre que $y=y_1+y_2$ é solução de $y''+f(x)y'+g(x)y=h_1+h_2$. Use este fato para resolver:

(a) $y''+3y'+2y=e^x+e^{2x}$ (b) $y''+y=\cos x+8x^2$

8. Ache a solução geral da equação diferencial dada em série de potências centradas em $x_0=0$:

(a) $y''-xy'-y=0$ (b) $y''-x^2y=0$ (c) $y''+2xy'+4y=0$
(d) $y''-xy=0$ (Equação de Airy) (e) $y''-xy'-y=0$ (f) $y''-y=0$
(g) $y''-2xy'+\lambda y=0$ (Equação de Hermite) (h) $(1-x)y''+y=0$ (i) $y''+\alpha^2x^2y=0$, $\alpha\neq 0$
(j) $y''+x^2y'+xy=0$ (k) $y''=x^2y$ (l) $y''=x^3y$

9. Dado $\alpha\in\mathbb{R}$, a equação diferencial

$$x^2y''+xy'+(x^2-\alpha^2)y=0,$$

é chamada *Equação de Bessel de ordem* α.

(a) Se $\alpha=0$, mostre que $y_1=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{2n}(n!)^2}x^{2n}$ e $y_2=y_1\ln x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2^{2n}(n!)^2}\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}\right)x^{2n}$ são soluções linearmente independentes da equação de Bessel.

(b) Se $\alpha=1$ mostre que $y=x\left(1-\frac{x^2}{2^22!}+\frac{x^4}{2^42!3!}-\frac{x^6}{2^62!3!4!}+\ldots\right)$ é solução.

10. Dado $\alpha\in\mathbb{R}$, a equação diferencial

$$(1-x^2)y''-2xy'+\alpha(\alpha+1)y=0,$$

é chamada *Equação de Legendre de ordem* α. Mostre que as funções

$$y_1=1+\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m\frac{\alpha(\alpha-2)(\alpha-4)\ldots(\alpha-2m+2)(\alpha+1)(\alpha+3)\ldots(\alpha+2m-1)}{(2m)!}x^{2m},$$
$$y_2=x+\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m\frac{(\alpha-1)(\alpha-3)\ldots(\alpha-2m+1)(\alpha+2)(\alpha+4)\ldots(\alpha+2m)}{(2m+1)!}x^{2m+1}$$

são soluções linearmente independentes da equação de Legendre no intervalo $(-1,1)$.

11. (Série binomial) Seja α um número real *não-inteiro*. Neste exercício, vamos encontrar uma expansão em série de potências para $(1+x)^\alpha$ em torno de $x=0$.

(a) Mostre que $y=(1+x)^\alpha$ é a única solução da equação $(1+x)y'=\alpha y$ em $(-1,\infty)$ satisfazendo $y(0)=1$.

(b) Mostre que a série de potências

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n$$

tem raio de convergência 1.

(c) Mostre que $1+g(x)$ satisfaz a mesma equação diferencial do ítem (a) e vale 1 em $x=0$. Conclua que para todo α não-inteiro vale

$$(1+x)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n$$

se $|x|<1$.

A série acima é chamada de *série binomial* e foi estudada primeiramente por Newton. A igualdade acima generaliza a fórmula usual do binômio de Newton e nos induz a definir para α não-inteiro e $n \in \mathbb{N}$ o coeficiente binomial $\binom{\alpha}{n} \doteq \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}$. Dessa forma, temos para cada $x \in (-1,1)$ que

$$(1+x)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n.$$

☆ **Roteiro para resolver uma equação diferencial linear de segunda ordem** $y'' + py' + qy = f$ **(via método de variação dos parâmetros):**

(a) Encontre soluções linearmente independentes y_1, y_2 da equação homogênea associada $y'' + py' + qy = 0$;

(b) Calcule o Wronskiano $W(y_1,y_2) = \det\begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{pmatrix}$;

(c) A solução geral da equação é soma de uma *solução particular* com uma *solução geral* da equação homogênea associada:

$$y = -\left(\int \frac{y_2 f}{W(y_1,y_2)} dx\right) y_1 + \left(\int \frac{y_1 f}{W(y_1,y_2)} dx\right) y_2 + C_1 y_1 + C_2 y_2$$

✰ Respostas

(1)

(a) $y = C_1e^{-x} + C_2xe^{-x}$; (b) $y = C_1e^{2x} + C_2xe^{2x}$; (c) $y = C_1e^x + C_2\operatorname{sen} x + C_3\cos x$;
(d) $y = e^x(C_1\operatorname{sen}(\sqrt{3}x) + C_2\cos(\sqrt{3}x))$; (e) $y = C_1e^{5x} + C_2e^{4x}$;
(f) $y = e^{-x/2}(C_1\operatorname{sen}(\frac{\sqrt{3}}{2}x) + C_2\cos(\frac{\sqrt{3}}{2}x))$; (g) $y = C_1e^x + C_2xe^x + C_3x^2e^x$;
(h) $y = C_1\cos(\frac{\sqrt{2}}{2}x) + C_2\operatorname{sen}(\frac{\sqrt{3}}{2}x)$; (i) $y = C_1 + (C_2 + C_3x)\cos x + (C_4 + C_5x)\operatorname{sen} x$;
(j) $y = C_1e^x\cos x + C_2e^x\operatorname{sen} x$; (k) $y = C_1\operatorname{sen}(2x) + C_2\cos(2x)$; (l) $y = C_1e^{-2x}\cos x + C_2e^{-2x}\operatorname{sen} x$.

(2)

(a) $y_2 = x^{-2}$; (b) $y_2 = 1 - \frac{x}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$; (c) $y_2 = e^x$; (d) $y_2 = x^{-2}$; (e) $y_2 = x^{-2}$; (f) $y_2 = x^{-1/2}\cos x$;
(g) $y_2 = e^x x^2$; (h) $y_2 = e^{-2x}$; (i) $y_2 = x^{-1}$; (j) $y_2 = x^{-1}\ln x$; (k) $y_2 = xe^x$; (l) $y_2 = \frac{3x}{4} + \frac{3x^2-1}{8}\ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$
(Dica: Escreva

$$\frac{1}{(3x^2-1)^2(1-x^2)} = A\left(\frac{1}{(\sqrt{3}x-1)^2} + \frac{1}{(\sqrt{3}x+1)^2}\right) + B\left(\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x}\right).$$

(4)

(a) $y = C_1\cos(\ln x) + C_2\operatorname{sen}(\ln x) + 1$; (b) $y = C_1x^2 + C_2x^2\ln x$; (c) $y = x^{-1}\{C_1\cos(\ln x^3) + C_2\operatorname{sen}(\ln x^3)\}$;
(d) $y = C_1x^{-2+\frac{\sqrt{10}}{2}} + C_2x^{-2+\frac{\sqrt{10}}{2}}$; (e) $y = C_1x^3 + C_2x^{-4}$;
(f) $y = C_1x^{1/2} + C_2x^{-1}$; (g) $y = x^{-2}(C_1 + C_2\ln x)$;
(h) $y = C_1\cos(\ln x) + C_2\operatorname{sen}(\ln x)$; (i) $y = C_1x^{-1} + C_2x^{-2}$;
(j) $y = C_1x + C_2x\ln x$; (k) $y = C_1x^{-1}\cos(2\ln x) + C_2x^{-1}\operatorname{sen}(2\ln x)$;
(l) $y = C_1x^{3/2}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln x\right) + C_1x^{3/2}\operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln x\right)$;
(m) $y = C_1x^3 + C_2x^3\ln x$; (n) $y = C_1x^{-1/2}\cos\left(\frac{\sqrt{15}}{2}\ln x\right) + C_2x^{-1/2}\operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{15}}{2}\ln x\right)$; (o) $y = C_1x^{-1} + C_2x^2$

(5)

(a) $y = \frac{1}{2}x^2e^{-x}\ln x - \frac{3}{4}x^2e^{-x} + C_1e^{-x} + C_2xe^{-x}$; (b) $y = -e^{-x}(8x^2 + 4x + 1) + C_1e^{-x} + C_2e^{3x}$;
(c) $y = \frac{1}{2}xe^{-x}\operatorname{sen} 2x + \frac{1}{4}e^{-x}\cos 2x + C_1e^x\cos 2x + C_2e^x\operatorname{sen} 2x$; (d) $y = -3x^2 + 2x + 1 + C_1 + C_2e^{2x}$;
(e) $y = x\operatorname{sen} x + C_1\operatorname{sen} x + C_2\cos x$; (f) $y = (3/2)x^2e^{-x} + C_1e^{-x} + C_2xe^{-x}$;
(g) $y = (1/2)e^{-x}\{\cos x(x - (1/2)\operatorname{sen} 2x) + \operatorname{sen}^3 x\} + C_1e^{-x}\operatorname{sen} x + C_2e^{-x}\cos x$;
(h) $y = C_1\cos 2x + C_2\operatorname{sen} 2x + \operatorname{sen} x$;
(i) $y = e^{-5x}(7x^2 + C_1x + C_2)$; (j) $y = e^{2x}(x^3/12 - x^2/16 + x/32 - 1/128 + C_1) + C_2e^{-2x}$;
(k) $y = C_1e^x + C_2e^{-2x} - (2/5)(3\operatorname{sen} 2x + \cos 2x)$; (l) $y = C_1 + C_2e^{3x} - (\cos x + 3\operatorname{sen} x)/10 - x^2/6 - x/9$;
(m) $y = C_1 + C_2x + 12x^2 + 3x^3 + x^4/2 + x^5/20 + (C_3 + C_4x)e^x$;
(n) $y = C_1e^x + e^{-x/2}\left(C_2\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + C_3\operatorname{sen}\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) - x^3 - 5$; (o) $y = C_1e^{x\sqrt{2}} + C_2e^{-x\sqrt{2}} + e^x\operatorname{sen} x$;
(p) $y = (1/17)(3\cos x - 5\operatorname{sen} x) + C_1e^{4x} + C_2e^{-x}$; (q) $y = -x^2 + (3/2)x - 13/8 + C_1e^{4x} + C_2e^{-x}$;
(r) $y = e^x + C_1e^{3x} + C_2e^{2x}$; (s) $y = C_1\cos 3x + C_2\operatorname{sen} 3x + \{(\operatorname{sen} 3x)(\ln(\sec(3x) + \operatorname{tg}(3x))) - 1\}$;
(t) $y = -\ln(\operatorname{tg} x + \sec x))\cos x + C_1\operatorname{sen} + C_2\operatorname{sen} x$; (u) $y = -e^{-2x}\ln x + C_1e^{-2x} + C_2xe^{-2x}$;
(v) $y = (3/4)\operatorname{sen} 2x\ln(\operatorname{sen} 2x) - (3/2)x\cos 2x + C_1\operatorname{sen} 2x + C_2\cos 2x$;
(w) $y = x\operatorname{sen} x + \cos x\ln(\cos x) + C_1\cos x + C_2\operatorname{sen} x$; (x) $y = (e^x/2)(\cos x - \operatorname{sen} x) + C_1e^x + C_2e^{2x}$
(y) $y = x + C_1x^2 + C_2$; (z) $y = x^2/3 + C_1x + C_2/x$

(6)

(a) $y = C_1x + C_2(x^2 + 1) + x^4/6 - x^2/2$; (b) $y = C_1x + C_2x^2 + 4x^2\ln x$; (c) $y = C_1x^{-1} + C_2x^{-5} + x/12$;
(d) $y = C_1x + C_2xe^x - 2x^2$; (e) $y = C_1(1 + x) + C_2e^x + (1/2)e^{2x}(x - 1)$;
(f) $y = C_1x^{-1/2}\cos x + C_2x^{-1/2}\operatorname{sen} x - (3/2)x^{-1/2}\cos x$;

(7)

(a) $y = e^x/6 + e^{2x}/12 + C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x}$; (b) $y = ((1/2)x + C_1)\operatorname{sen} x + C_2 \cos x + 8x^2 - 16$

(8)

(a) $y = C_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2x}}{2^n n!} + C_1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n.n!}{(2n+1)!} x^{2n+1}$;
(b) $y = C_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{4n}}{4n(n-1)(4n-4)(4n-5)...4.3} + C_1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{4n+1}}{(4n+1)(4n)...5.4}$;
(c) $y = C_0 \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n x^{2n}}{(2n-1)(2n-3)...5.3} + C_1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{n!}$
(d) $y = C_0 \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{3n}}{(3n)(3n-1)(3n-3)(3n-4)...3\cdot 2}\right) + C_1 \left(x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{3n+1}}{(3n+1)(3n)(3n-2)(3n-3)...4\cdot 3}\right)$;
(e) $y = C_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{2^n n!} + C_1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n n! x^{2n+1}}{(2n+1)!}$;
(f) $y = C_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} + C_1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = C_0 \cosh x + C_1 \sinh x$;

Parte 4

☆ Transformada de Laplace

1. Calcule a transformada de Laplace de cada uma das funções abaixo:

   (1) $f(t) = e^{5t} - 2e^t$ (2) $f(t) = \cos(2t) - t$ (3) $f(t) = 2t^6 - t + \cos(7t)$

   (4) $f(t) = e^{2t-3}$ (5) $f(t) = \sinh(3t) + 5t^2 + 3$ (6) $f(t) = 2t^2 - t + 4$

   (7) $f(t) = \cos^2 t$ (8) $f(t) = e^{2x}(\cosh(3x) + 2\sinh(3x))$ (9) $f(t) = (\operatorname{sen} t - \cos t)^2$

   (10) $f(t) = \begin{cases} 5 & \text{, se } 0 < t < 3 \\ 0 & \text{, se } t \geq 3 \end{cases}$ (11) $f(t) = \begin{cases} 0 & \text{, se } 0 < t < 1 \\ t^2 - 2t + 2 & \text{, se } t \geq 1 \end{cases}$

   (12) $f(t) = \begin{cases} \operatorname{sen} t & \text{, se } 0 < t < 2\pi \\ \operatorname{sen} t + \cos t & \text{, se } t \geq 2\pi \end{cases}$ (13) $f(t) = \begin{cases} 2t & \text{, se } 0 < t < 5 \\ 1 & \text{, se } t \geq 5 \end{cases}$

2. (Função Gamma) A função Gamma é definida por

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt,$$

   para $x > 0$.

   (a) Mostre que Γ é bem-definida, i.e., que a integral acima é convergente para todo $x > 0$.

   (b) Use integração por partes para mostrar que $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$, para todo $x > 0$.

   (c) Use indução em n para mostrar que $\Gamma(n) = (n-1)!$ para todo inteiro $n > 0$. Isso mostra que a função Γ é uma extensão da função fatorial para todos os reais positivos.

   (d) Mostre que $\mathscr{L}(t^\alpha)(s) = \dfrac{\Gamma(\alpha+1)}{s^{\alpha+1}}$, para todos $s > 0$ e $\alpha > -1$.

3. Vamos estudar a transformada de Laplace da função $f(t) = t^\alpha$ para alguns valores fracionários de α.

   (a) Mostre que $\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}/2$.

   (b) Mostre que $\mathscr{L}(t^{-1/2}) = \sqrt{\pi/s}$, para $s > 0$.

   (c) Mostre que $\mathscr{L}(t^{1/2}) = \sqrt{\pi}/2s^{3/2}$, para $s > 0$.

4. Mostre que $(\mathscr{L}f)^{(n)}(s) = \mathscr{L}((-t)^n f(t))$ se $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ for de crescimento exponencial. Use este fato para calcular $\mathscr{L}f(s)$ se:

   (1) $f(t) = t^3 \operatorname{sen} t$ (2) $f(t) = t^2 \cos t$ (3) $f(t) = t^2 \sinh t$ (4) $f(t) = t \cosh t$

5. Resolva os seguintes problemas de valor inicial:

   (1) $y'' - y' - 6y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = -1$ (2) $y'' + 3y' + 2y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$

   (3) $y'' - 2y' + 2y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$ (4) $y^{(iv)} - y = 0$, $y(0) = y''(0) = 0$, $y'(0) = y'''(0) = 1$

   (5) $y'' + y = \cos(2t)$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$ (6) $y'' - 2y' + 2y = e^{-t}$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$

   (7) $y'' + y = x$, $y(0) = 1$, $y'(0) = -2$ (8) $y'' - 6y' + 9y = e^t$, $y(0) = y'(0) = 1$

6. Verifique as seguintes igualdades para a transformada de Laplace e a transformada de Laplace inversa:

   (a) $\mathscr{L}(f(ct)) = \dfrac{1}{c}\mathscr{L}f\left(\dfrac{s}{c}\right)$;

   (b) $\mathscr{L}^{-1}\{Y(ks)\} = \dfrac{1}{k}\mathscr{L}^{-1}Y\left(\dfrac{t}{k}\right)$;

   (c) $\mathscr{L}^{-1}\{Y(as+b)\} = \dfrac{e^{-bt/a}}{a}\mathscr{L}^{-1}Y\left(\dfrac{t}{a}\right)$, se $a > 0$.

7. Calcule a transformada inversa de Laplace $\mathscr{L}^{-1}Y$:

   (1) $Y(s) = \dfrac{1}{s^2+1} - \dfrac{2s}{(s-1)^2}$ (2) $Y(s) = \dfrac{3s+1}{s^2-4s+8}$ (3) $Y(s) = \dfrac{1}{s^2+4s+13}$

   (4) $Y(s) = \dfrac{2s+1}{4s^2+4s+5}$ (5) $Y(s) = \dfrac{1}{9s^2-12s+3}$ (6) $Y(s) = \dfrac{(s-1)e^{-2s}}{s^2-2s+2}$

   (7) $Y(s) = \dfrac{2e^{-2s}}{s^2-4}$ (8) $Y(s) = \dfrac{e^{-s}(s-2)}{s^2-4s+3}$ (9) $Y(s) = \dfrac{e^{-4s}}{2s-1}$

8. Esboce o gráfico de cada uma das funções abaixo e calcule sua transformada de Laplace:

   (1) $f(t) = 1 - u_1(t)$ (2) $f(t) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n u_n(t)$ (3) $f(t) = \begin{cases} 1 & \text{, em } (0,1)\cup(2,3) \\ 0 & \text{, fora de } (0,1)\cup(2,3) \end{cases}$

   (4) $f(t) = |\mathrm{sen}\, t|$ (5) $f(t) = t,\ 0 \le t < 1,\ f(t+1) = f(t)$ (6) $f(t) = \begin{cases} 1 & \text{, em } (0,1) \\ \text{-1} & \text{, em } (1,2) \end{cases}$, $f(t+2) = f(t)$

9. Resolva os seguintes problemas de valor inicial:

   (1) $y'' + y = 1 - u_{\pi/2}(t)$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$
   (2) $y'' + 4y = \mathrm{sen}\, t - u_{2\pi}(t)\mathrm{sen}\,(t-2\pi)$, $y(0) = y'(0) = 0$
   (3) $y'' + 4y = \mathrm{sen}\, t + u_{\pi}(t)\mathrm{sen}\,(t-\pi)$, $y(0) = y'(0) = 0$
   (4) $y'' + 2y' + y = 1 - u_1(t)$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$
   (5) $y'' + 3y' + 2y = u_2(t)$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$
   (6) $y'' + y = u_{\pi}(t)$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$
   (7) $y'' + y = f(t)$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$, onde $f(t) = \begin{cases} 1 & \text{, em } [0,\pi) \\ 0 & \text{, em } [\pi,2\pi) \end{cases}$, $f(t+2\pi) = f(t)$
   (8) $y'' + y = f(t)$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$, onde $f(t) = \begin{cases} t & \text{, em } [0,1) \\ 1 & \text{, em } [1,\infty) \end{cases}$
   (9) $y'' + 2y' + 2y = \delta(t-\pi)$, $y(0) = y'(0) = 0$
   (10) $y'' + 2y' + 2y = \delta(t-\pi)$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$
   (11) $y'' + 4y = \delta(t-\pi) - \delta(t-2\pi)$, $y(0) = y'(0) = 0$
   (12) $y'' + 2y' + y = \delta(t) + u_{2\pi}(t)$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$
   (13) $y'' - y = 2\delta(t-1)$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$
   (14) $y'' + y = \delta(t-\pi)\cos t$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$

10. Use a transformada de Laplace para calcular as integrais abaixo:

   (1) $\displaystyle\int_0^{\infty} te^{-2t}\cos t\, dt$ (2) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{e^{-t}-e^{-3t}}{t} dt$ (3) $\displaystyle\int_0^{\infty} t^3 e^{-t}\mathrm{sen}\, t\, dt$

   (4) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{e^{-t}\mathrm{sen}\, t}{t} dt$ (5) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{e^{-t}\mathrm{sen}^2\, t}{t} dt$ (6) $\displaystyle\int_0^{\infty} te^{-3t}\mathrm{sen}\, t\, dt$

☆ **Respostas**

(1)

(1) $Y=(s-5)^{-1}+2(s-1)^{-1}$; (2) $Y=s(s^2+4)^{-1}-s^{-1}$; (3) $Y=1040s^{-7}-s^{-1}+s(s^2+49)$;
(4) $Y=e^{-3}(s-2)^{-1}$; (5) $Y=3(s^2-9)^{-1}+10s^{-3}+3s^{-1}$; (6) $Y=4s^{-3}-s^{-2}+4s^{-1}$;
(7) $Y=(1/2)(s^{-1}+s(s^2+4)^{-1})$; (8) $Y=s((s-2)^2-9)^{-1}$; (9) $Y=s^{-1}-(s^2+4)^{-1}$;
(10) $Y=5(1-e^{-3s})s^{-1}$; (11) $Y=e^{-s}(s^2+2)s^{-3}$; (12) $Y=(1+se^{-2\pi s})(s^2+1)^{-1}$;
(13) $Y=2s^{-2}(1-e^{-5s})9s^{-1}e^{-5s}$.

(5)

(1) $y=(1/5)(e^{3t}+4e^{-2t})$; (2) $y=2e^{-t}-e^{-2t}$; (3) $y=e^t\operatorname{sen}t$; (4) $y=\cosh t$;
(5) $y=(-1/3)(\cos(2t)-4\cos t)$; (6) $y=(1/5)(e^{-t}-e^t\cos t+7e^t\operatorname{sen}t)$; (7) $y=x+\cos x+\operatorname{sen}x$;
(8) $y=(1/4)(e^t+3e^{3t}-18te^{3t})$;

(7)

(1) $y=\operatorname{sen}t-2e^t+2te^t$; (2) $y=e^{2x}(3\cos 2t+(7/2)\operatorname{sen}2t)$; (3) $y=(1/3)e^{-2t}\operatorname{sen}3t$;
(4) $y=(1/2)e^{-t/2}\cos t$; (5) $y=(1/3)\sinh(t/3)e^{2t/3}$; (6) $y=u_2(t)e^{t-2}\cos(t-2)$;
(7) $y=u_2(t)\sinh(2t-2)$; (8) $y=u_1(t)e^{2t-2}\cosh(t-1)$; (9) $y=(1/2)u_4(t)e^{(t-4)/2}$

(8)

(1) $Y=s^{-1}(1-e^{-s})$; (2) $Y=(s(1+e^{-s}))^{-1}$; (3) $Y=s^{-1}(1-e^{-s}+e^{-2s}-e^{-3s})$;
(4) $Y=(1+e^{-\pi s})(1+s^2)^{-1}(1-e^{-\pi s})^{-1}$; (5) $Y=(s(1+e^{-s}))^{-1}$; (6) $Y=(1-e^{-s})s^{-1}(1+e^{-s})^{-1}$;

(9)

(1) $y=1-\cos t-\operatorname{sen}t-u_{\pi/2}(t)(1-\operatorname{sen}t)$; (2) $y=(1/6)(1-u_{2\pi(t)})(2\operatorname{sen}t-\operatorname{sen}2t)$;
(3) $y=(1/6)(2\operatorname{sen}t-\operatorname{sen}2t)-(1/6)u_\pi(t)(2\operatorname{sen}t+\operatorname{sen}2t)$;
(4) $y=1-u_1(t)(1-e^{-(t-1)}-(t-1)e^{-(t-1)}$; (5) $y=e^{-t}-e^{-2t}+u_2(t)((1/2)-e^{-(t-2)}+(1/2)e^{-2(t-2)})$;
(6) $y=\cos t+u_\pi(t)(1+\cos t)$; (7) $y+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n u_{n\pi}(t)(1-\cos(t-n\pi))$;
(8) $y=t-u_1(t)(t-1-\operatorname{sen}(t-1))$; (9) $y=u_\pi(t)e^{-(t-\pi)}\operatorname{sen}(t-\pi)$;
(10) $y=e^{-t}\cos t+e^{-t}\operatorname{sen}t-u_\pi(t)e^{-(t-\pi)}\operatorname{sen}t$; (11) $y=(1/2)\operatorname{sen}2t(u_\pi(t)-u_{2\pi}(t))$;
(12) $y=2te^{-t}+u_{2\pi}(t)(1-e^{-(t-2\pi)}-(t-2\pi)e^{-(t-2\pi)})$; (13) $y=\cosh t+2u_1(t)\sinh(t-1)$;
(14) $y=(1+u_\pi(t))\operatorname{sen}t$

(10)

(1) $3/25$; (2) $\ln 3$; (3) 0; (4) $\pi/4$; (5) $(1/4)\ln 5$; (6) $3/50$