

GABARITO DA PRIMEIRA PROVA - TIPO A - 29/03/2012

Questão 1 (4 pontos) Determine se cada uma das seqüências $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ abaixo converge e, em caso afirmativo, calcule o limite:

(a) $x_n = \left(1 - 3\text{sen}\left(\frac{2}{n}\right)\right)^n$

Solução. Temos que

$$\left(1 - 3\text{sen}\left(\frac{2}{x}\right)\right)^x = e^{x \ln(1 - 3\text{sen}(\frac{2}{x}))},$$

e, aplicando a regra de L'Hospital,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln\left(1 - 3\text{sen}\left(\frac{2}{x}\right)\right) &= \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1 - 3\text{sen}(2y))}{y} \\ &= \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{-6 \cos(2y)}{1 - 3\text{sen}(2y)} \\ &= -6, \end{aligned}$$

logo, a seqüência converge para e^{-6} . ■

(b) $x_n = \frac{(-1)^n n^4 + \ln(2n+1)}{\sqrt[3]{n^{13}+2}}$

Solução. Dividindo o numerador e o denominador da primeira parcela abaixo por $n^{13/3}$, temos

$$x_n = \frac{(-1)^n n^4}{\sqrt[3]{n^{13}+2}} + \frac{\ln(2n+1)}{\sqrt[3]{n^{13}+2}} = \frac{(-1)^n n^{-1/3}}{\sqrt[3]{1+2/n^{13}}} + \frac{\ln(2n+1)}{\sqrt[3]{n^{13}+2}}.$$

O limite da primeira parcela é zero e o limite da segunda parcela também é zero, pela regra de L'Hospital, logo, $x_n \rightarrow 0$. ■

(c) $x_n = \sum_{k=1}^n \frac{5k - \sqrt{2k}}{\sqrt{k+1}}$

Solução. Dividindo por \sqrt{k} o numerador e o denominador da expressão abaixo, temos

$$\frac{5k - \sqrt{2k}}{\sqrt{k+1}} = \frac{5\sqrt{k} - \sqrt{2}}{\sqrt{1+1/k}} \rightarrow \infty,$$

logo, $\{x_n\}$ diverge para $+\infty$, pelo critério do termo geral para séries. ■

(d) $x_n = \sqrt[n]{2^n n^3 + 3^n n^2 + 4n + 6}$

Solução. Temos que

$$3 \leq \sqrt[n]{2^n n^3 + 3^n n^2 + 4n + 6} \leq \sqrt[n]{3^n n^3 + 3^n n^3 + 3^n n^3 + 3^n n^3} = 3 \sqrt[n]{4} (\sqrt[n]{n})^3 \rightarrow 3,$$

logo, $\{x_n\}$ converge para 3, pelo teorema do confronto. ■

Questão 2 (4 pontos) Classifique as séries abaixo em absolutamente convergentes, condicionalmente convergentes e divergentes:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \operatorname{sen}\left(\frac{2}{\sqrt{n}}\right)$

Solução. A série converge, pelo critério de Leibniz, mas não absolutamente. De fato, chamando $a_n = \operatorname{sen}\left(\frac{2}{\sqrt{n}}\right)$ e $b_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$, temos que $\frac{a_n}{b_n} \rightarrow 2$, logo, pelo critério de comparação no limite, a série $\sum_{n=1}^{\infty} \left|(-1)^n \operatorname{sen}\left(\frac{2}{\sqrt{n}}\right)\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen}\left(\frac{2}{\sqrt{n}}\right)$ converge se e só se a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ converge. Esta última série é a série p com $p = 1/2$, a qual sabemos ser divergente. Portanto, a série converge condicionalmente. ■

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{(2n)^{2n}}$

Solução. Pondo $a_n = \frac{(2n)!}{(2n)^{2n}}$, temos que

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{(2n+2)!}{(2n+2)^{2n+2}} \frac{(2n)^{2n}}{(2n)!} = \frac{2n+1}{2n+2} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^2} \rightarrow \frac{1}{e^2} < 1,$$

logo, a série converge (absolutamente). ■

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2+3}{n^5(\ln n)^3}$

Solução. Temos que $\ln n \geq 1$ para qualquer $n > 3$, portanto, nestas condições,

$$\left|(-1)^n \frac{n^2+3}{n^5(\ln n)^3}\right| \leq \frac{n^2+3}{n^5} = \frac{1}{n^3} + \frac{3}{n^5}.$$

Como as séries p com $p = 3$ e $p = 5$ convergem, segue que a série converge absolutamente, pelo critério de comparação. ■

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} 4^n n \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$

Solução. Temos

$$\sqrt[n]{4^n n \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}} = 4 \sqrt[n]{n} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} \rightarrow \frac{4}{e} > 1,$$

logo, a série diverge, pelo critério da raiz. ■

Questão 3 (2 pontos) Determine o raio e o intervalo de convergência da série de potências

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{\sqrt[3]{n^2 + 3n + 1}} (x-1)^n$$

Solução. Temos que

$$\sqrt[n]{\left| \frac{2^n}{\sqrt[3]{n^2+3n+1}} (x-1)^n \right|} = \frac{2|x-1|}{\sqrt[n]{\sqrt[3]{n^2+3n+1}}}.$$

Como $\sqrt[n]{\sqrt[3]{n^2+3n+1}} = \sqrt[3]{\sqrt[n]{n^2+3n+1}}$ e temos $1 \leq \sqrt[n]{n^2+3n+1} \leq \sqrt[n]{3n^2} = \sqrt[n]{3}(\sqrt[n]{n})^2 \rightarrow 1$, concluimos que a expressão acima tende a $2|x-1|$ quando $n \rightarrow \infty$. Logo, pelo critério da razão, a série converge absolutamente no intervalo $|x-1| < 1/2$, i.e., em $(1/2, 3/2)$. Vejamos o que ocorre nos extremos:

- (i) A série em $x = 1/2$ é $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{\sqrt[3]{n^2+3n+1}} (1/2-1)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt[3]{n^2+3n+1}}$, a qual converge, pelo critério de Leibniz.
- (ii) A série em $x = 3/2$ é $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{\sqrt[3]{n^2+3n+1}} (3/2-1)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n^2+3n+1}}$, a qual diverge, pelo critério de comparação no limite (comparação com a série p com $p = 2/3 < 1$).

Portanto, o raio de convergência é $1/2$ e o intervalo de convergência é $I = [1/2, 3/2)$. ■