UFPR - Universidade Federal do Paraná
Departamento de Matemática
CM043 - Cálculo III - Turma B
Prof. José Carlos Eidam

GABARITO DA PRIMEIRA PROVA - TIPO B - 29/03/2012

Questão 1 **(4 pontos)** Determine se cada uma das sequências $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ abaixo converge e, em caso afirmativo, calcule o limite:

(a) $x_n = \sqrt[n]{2^n n^3 + 3^n n^2 + 7n + 2}$

Solução. Temos que

$$3 \leq \sqrt[n]{2^n n^3 + 3^n n^2 + 7n + 2} \leq \sqrt[n]{3^n n^3 + 3^n n^3 + 3^n n^3 + 3^n n^3} = 3\sqrt[n]{4}(\sqrt[n]{n})^3 \to 3,$$

logo, $\{x_n\}$ converge para 3, pelo teorema do confronto. ∎

(b) $x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{11k - \sqrt{3k}}{\sqrt{k+6}}$

Solução. Dividindo por $\sqrt{k}$ o numerador e o denominador da expressão abaixo, temos

$$\frac{11k - \sqrt{3k}}{\sqrt{k+6}} = \frac{11\sqrt{k} - \sqrt{3}}{\sqrt{1+6/k}} \to \infty,$$

logo, $\{x_n\}$ diverge para $+\infty$, pelo critério do termo geral para séries. ∎

(c) $x_n = \left(1 - 2\operatorname{sen}\left(\frac{3}{n}\right)\right)^n$

Solução. Temos que

$$\left(1 - 2\operatorname{sen}\left(\frac{3}{x}\right)\right)^x = e^{x\ln\left(1-2\operatorname{sen}\left(\frac{3}{x}\right)\right)},$$

e, aplicando a regra de L'Hospital,

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty} x\ln\left(1 - 2\operatorname{sen}\left(\frac{3}{x}\right)\right) &= \lim_{y\to 0^+} \frac{\ln\left(1 - 2\operatorname{sen}(3y)\right)}{y} \\
&= \lim_{y\to 0^+} \frac{-6\cos(3y)}{1 - 2\operatorname{sen}(3y)} \\
&= -6,
\end{aligned}$$

logo, a sequência converge para e^{-6}.

∎

(d) $x_n = \frac{(-1)^n n^4 + \ln(5n+3)}{\sqrt[3]{n^{13}+7}}$

Solução. Dividindo o numerador e o denominador da primeira parcela abaixo por $n^{13/3}$, temos

$$x_n = \frac{(-1)^n n^4}{\sqrt[3]{n^{13}+7}} + \frac{\ln(5n+3)}{\sqrt[3]{n^{13}+7}} = \frac{(-1)^n n^{-1/3}}{\sqrt[3]{1+7/n^{13}}} + \frac{\ln(5n+3)}{\sqrt[3]{n^{13}+2}}.$$

O limite da primeira parcela é zero e o limite da segunda parcela também é zero, pela regra de L'Hospital, logo, $x_n \to 0$. ∎

Questão 2 **(4 pontos)** Classifique as séries abaixo em absolutamente convergentes, condicionalmente convergentes e divergentes:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} 3^n n \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$

Solução. Temos

$$\sqrt[n]{3^n n \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}} = 3\sqrt[n]{n}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \to \frac{3}{e} > 1\,,$$

logo, a série diverge, pelo critério da raiz.

∎

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2+3}{n^4(\ln n)^2}$

Solução. Temos que $\ln n \geq 1$ para qualquer $n > 3$, portanto, nestas condições,

$$\left|(-1)^n \frac{n^2+3}{n^4(\ln n)^2}\right| \leq \frac{n^2+3}{n^4} = \frac{1}{n^2} + \frac{3}{n^4}\,.$$

Como as séries p com $p = 2$ e $p = 4$ convergem, segue que a série converge absolutamente, pelo critério de comparação. ∎

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \operatorname{sen}\left(\frac{2}{\sqrt{n}}\right)$

Solução. A série converge, pelo critério de Leibniz, mas não absolutamente. De fato, chamando $a_n = \operatorname{sen}\left(\frac{2}{\sqrt{n}}\right)$ e $b_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$, temos que $\frac{a_n}{b_n} \to 2$, logo, pelo critério de comparação no limite, a série $\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^n \operatorname{sen}\left(\frac{2}{\sqrt{n}}\right)\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen}\left(\frac{2}{\sqrt{n}}\right)$ converge se e só se a série $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$ converge. Esta última série é a série p com $p = 1/2$, a qual sabemos ser divergente. Portanto, a série converge condicionalmente. ∎

(d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{(2n)^{2n}}$

Solução. Pondo $a_n = \frac{(2n)!}{(2n)^{2n}}$, temos que

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{(2n+2)!}{(2n+2)^{2n+2}}\frac{(2n)^{2n}}{(2n)!} = \frac{2n+1}{2n+2}\frac{1}{\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)^2} \to \frac{1}{e^2} < 1\,,$$

logo, a série converge (absolutamente). ∎

Questão 3 **(2 pontos)** Determine o raio e o intervalo de convergência da série de potências

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{\sqrt[4]{2n^2+5n+2}}(x-1)^n$$

Solução. Temos que

$$\sqrt[n]{\left|\frac{2^n}{\sqrt[4]{2n^2+5n+2}}(x-1)^n\right|} = \frac{2|x-1|}{\sqrt[n]{\sqrt[4]{2n^2+5n+2}}}.$$

Como $\sqrt[n]{\sqrt[4]{2n^2+5n+2}} = \sqrt[4]{\sqrt[n]{2n^2+5n+2}}$ e temos $1 \le \sqrt[n]{2n^2+5n+2} \le \sqrt[n]{9n^2} = \sqrt[n]{9}(\sqrt[n]{n})^2 \to 1$, concluímos que a expressão acima tende a $2|x-1|$ quando $n \to \infty$. Logo, pelo critério da razão, a série converge absolutamente no intervalo $|x-1| < 1/2$, i.e., em $(1/2, 3/2)$. Vejamos o que ocorre nos extremos:

(i) A série em $x = 1/2$ é $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{\sqrt[4]{2n^2+5n+2}}(1/2-1)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{\sqrt[4]{2n^2+5n+2}}$, a qual converge, pelo critério de Leibniz.

(ii) A série em $x = 3/2$ é $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{\sqrt[4]{2n^2+5n+2}}(3/2-1)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[4]{2n^2+5n+2}}$, a qual diverge, pelo critério de comparação no limite (comparação com a série p com $p = 1/2 < 1$).

Portanto, o raio de convergência é $1/2$ e o intervalo de convergência é $I = [1/2, 3/2)$. ∎