UFPR - Universidade Federal do Paraná
Departamento de Matemática
CM043 - Cálculo III - Turma B
Prof. José Carlos Eidam

GABARITO DA SEGUNDA PROVA - TIPO A - 26/04/2012

Questão 1 Seja $f(x) = \int_0^x \frac{\text{sen}(t^3)}{t^2} dt$, $x \in \mathbb{R}$.

(a) **(1,5 ponto)** Desenvolva f em série de Taylor em torno de $x_0 = 0$ e calcule o raio de convergência da série obtida.

Solução. Vimos em sala que $\text{sen}\, t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} t^{2n+1}$, $t \in \mathbb{R}$, assim, $\frac{\text{sen}(t^3)}{t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} t^{6n+1}$, portanto, integrando termo a termo a série, obtemos que

$$f(x) = \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} t^{6n+1} \right) dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!(6n+2)} x^{6n+2},$$

e o raio de convergência desta última série também é infinito. ∎

(b) **(1,5 ponto)** Estime $f(1) = \int_0^1 \frac{\text{sen}(t^3)}{t^2} dt$ com erro menor que 10^{-4}.

Solução. Pela fórmula de Taylor com resto de Lagrange, sabemos que, para qualquer $t \in \mathbb{R}$ existe c entre 0 e t tal que

$$\text{sen}\, t = \sum_{n=0}^{N} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} t^{2n+1} + \frac{\text{sen}^{(2n+2)}(c)}{(2N+2)!} t^{2N+2}.$$

Assim,

$$\frac{\text{sen}(t^3)}{t^2} - \sum_{n=0}^{N} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} t^{6n+2} = \frac{\text{sen}^{(2N+2)}(c)}{(2N+2)!} t^{6N+4},$$

para um certo c entre t^3 e 0. Integrando ambos os membros da igualdade entre 0 e 1, tomando o módulo e observando que $|\text{sen}^{(2n+2)}(c)| \leq 1$ qualquer que seja t, concluímos que

$$\left| \int_0^1 \frac{\text{sen}(t^3)}{t^2} dt - \sum_{n=0}^{N} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!(6n+3)} \right| \leq \frac{1}{(2N+2)!(6N+5)}.$$

Assim, para obtermos uma aproximação com erro menor que 10^{-4}, devemos escolher N de forma que $1/(2N+2)!(6N+5) < 10^{-4}$, ou seja, $(2N+2)!(6N+5) > 10^4$. O menor N com esta propriedade é $N = 2$, ou seja,

$$\int_0^1 \frac{\text{sen}(t^3)}{t^2} dt \approx \frac{1}{3} - \frac{1}{3!9} + \frac{1}{5!15} \approx 0{,}35185$$

com precisão de 4 casas decimais. ∎

Questão 2 Determine a solução geral das equações diferenciais de primeira ordem abaixo:

(a) **(1,5 ponto)** $xy' - y = xe^{-y/x}$

Solução. Esta equação é homogênea e pode ser reescrita como $y' = (y/x) + e^{-y/x}$. Fazendo $u = y/x$ e as mudanças decorrentes, obtemos a equação de variáveis separáveis $xu' = e^{-u}$, cuja solução geral é $u = \ln(\ln|x| + C)$, logo, a solução geral da equação é

$$y = x\ln(\ln|x| + C),$$

para $C \in \mathbb{R}$. ∎

(b) **(1,5 ponto)** $3y'\sqrt{y} + 2xy\sqrt{y} = 2xe^{-x^2}$

Solução. Esta é uma equação de Bernoulli. Fazendo $u = y\sqrt{y} = y^{3/2}$, temos $u' + xu = xe^{-x^2}$, cuja solução geral é $u = -e^{-x^2} + Ce^{-x^2/2}$, logo,

$$y = \left(Ce^{-x^2/2} - e^{-x^2}\right)^{2/3}, \ C \in \mathbb{R}.$$

∎

Questão 3 **(2 pontos)** Determine a solução geral da equação diferencial

$$y' = -\frac{y\cos(xy) + 3x^2y}{x\cos(xy) + x^3}.$$

Solução. Escrevendo $y' = dy/dx$, a equação é equivalente a

$$(y\cos(xy) + 3x^2y)dx + (x\cos(xy) + x^3)dy = 0$$

a qual é exata e tem suas soluções dadas implicitamente por

$$\operatorname{sen}(xy) + x^3y = C, \ C \in \mathbb{R}.$$

∎

Questão 4 **(2 pontos)** Determine um fator integrante e resolva a equação diferencial

$$(2y\sec^2 x + \cos x)dx + \operatorname{tg} x\, dy = 0$$

no intervalo $(0, \pi/2)$.

Solução. Pondo $P = 2y\sec^2 x + \cos x$ e $Q = \operatorname{tg} x$, temos que $\frac{Q_x - P_y}{Q} = \frac{\sec^2 x - 2\sec^2 x}{\operatorname{tg} x} = -\frac{\sec^2 x}{\operatorname{tg} x}$, logo, um fator integrante para a equação é dado por

$$u(x) = e^{-\int \frac{Q_x - P_y}{Q}dx} = e^{\int \frac{\sec^2 x}{\operatorname{tg} x}dx} = e^{\ln(\operatorname{tg} x)} = \operatorname{tg} x.$$

Multiplicando o fator integrante pela equação, obtemos a equação

$$(2y\operatorname{tg} x\sec^2 x + \operatorname{sen} x)dx + \operatorname{tg}^2 x\, dy = 0,$$

a qual é exata e tem suas soluções dadas por $y\operatorname{tg}^2 - \cos x = C$, ou seja,

$$y = \frac{\cos x + C}{\operatorname{tg}^2 x}, \ C \in \mathbb{R}.$$

∎