UFPR - Universidade Federal do Paraná
Departamento de Matemática
CM043 - Cálculo III - Turma B
Prof. José Carlos Eidam

GABARITO DA SEGUNDA PROVA - TIPO B - 26/04/2012

Questão 1 Seja $f(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{\text{sen}(t^3)}{t^3}\,dt$, $x \in \mathbb{R}$.

(a) **(1,5 ponto)** Desenvolva f em série de Taylor em torno de $x_0 = 0$ e calcule o raio de convergência da série obtida.

Solução. Vimos em sala que $\text{sen}\,t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} t^{2n+1}$, $t \in \mathbb{R}$, assim, $\frac{\text{sen}(t^3)}{t^3} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} t^{6n}$, portanto, integrando termo a termo a série, obtemos que

$$f(x) = \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} t^{6n} \right) dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!(6n+1)} x^{6n+1},$$

e o raio de convergência desta última série também é infinito. ∎

(b) **(1,5 ponto)** Estime $f(1) = \displaystyle\int_0^1 \frac{\text{sen}(t^3)}{t^3}\,dt$ com erro menor que 10^{-4}.

Solução. Pela fórmula de Taylor com resto de Lagrange, sabemos que, para qualquer $t \in \mathbb{R}$ existe c entre 0 e t tal que

$$\text{sen}\,t = \sum_{n=0}^{N} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} t^{2n+1} + \frac{\text{sen}^{(2n+2)}(c)}{(2N+2)!} t^{2N+2}.$$

Assim,

$$\frac{\text{sen}(t^3)}{t^3} - \sum_{n=0}^{N} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} t^{6n} = \frac{\text{sen}^{(2N+2)}(c)}{(2N+2)!} t^{6N+3},$$

para um certo c entre t^3 e 0. Integrando ambos os membros da igualdade entre 0 e 1, tomando o módulo e observando que $|\text{sen}^{(2n+2)}(c)| \le 1$ qualquer que seja t, concluímos que

$$\left| \int_0^1 \frac{\text{sen}(t^3)}{t^3}\,dt - \sum_{n=0}^{N} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!(6n+1)} \right| \le \frac{1}{(2N+2)!(6N+4)}.$$

Assim, para obtermos uma aproximação com erro menor que 10^{-4}, devemos escolher N de forma que $1/(2N+2)!(6N+4) < 10^{-4}$, ou seja, $(2N+2)!(6N+4) > 10^4$. O menor N com esta propriedade é $N = 2$, ou seja,

$$\int_0^1 \frac{\text{sen}(t^3)}{t^2}\,dt \approx 1 - \frac{1}{3!7} + \frac{1}{5!13} \approx 0,52441$$

com precisão de 4 casas decimais. ∎

Questão 2 Determine a solução geral das equações diferenciais de primeira ordem abaixo:

(a) **(1,5 ponto)** $3y'\sqrt{y}+2xy\sqrt{y}=2xe^{-x^2}$

Solução. Esta é uma equação de Bernoulli. Fazendo $u=y\sqrt{y}=y^{3/2}$, temos $u'+xu=xe^{-x^2}$, cuja solução geral é $u=-e^{-x^2}+Ce^{-x^2/2}$, logo,

$$y=\left(Ce^{-x^2/2}-e^{-x^2}\right)^{2/3}\ ,\ C\in\mathbb{R}.$$

(b) **(1,5 ponto)** $xy'-y=xe^{-y/x}$

Solução. Esta equação é homogênea e pode ser reescrita como $y'=(y/x)+e^{-y/x}$. Fazendo $u=y/x$ e as mudanças decorrentes, obtemos a equação de variáveis separáveis $xu'=e^{-u}$, cuja solução geral é $u=\ln(\ln|x|+C)$, logo, a solução geral da equação é

$$y=x\ln(\ln|x|+C)\,,$$

para $C\in\mathbb{R}$. ∎

∎

Questão 3 **(2 pontos)** Determine a solução geral da equação diferencial

$$y'=\frac{y\mathrm{sen}(xy)-y^3}{3xy^2-x\mathrm{sen}(xy)}\,.$$

Solução. Escrevendo $y'=dy/dx$, a equação é equivalente a

$$(y\mathrm{sen}(xy)-y^3)dx+(x\mathrm{sen}(xy)-3xy^2)dy=0$$

a qual é exata e tem suas soluções dadas implicitamente por

$$\cos(xy)+xy^3=C\,,\ C\in\mathbb{R}.$$

∎

Questão 4 **(2 pontos)** Determine um fator integrante e resolva a equação diferencial

$$\mathrm{tg}\,y\,dx+(2x\sec^2y+\cos y)dy=0\,.$$

Solução. Pondo $Q=2x\sec^2y+\cos y$ e $P=\mathrm{tg}\,y$, temos que $\frac{Q_x-P_y}{P}=\frac{2\sec^2y-\sec^2y}{\mathrm{tg}\,y}=\frac{\sec^2y}{\mathrm{tg}\,y}$, logo, um fator integrante para a equação é dado por

$$u(x)=e^{\int\frac{Q_x-P_y}{P}dx}=e^{\int\frac{\sec^2y}{\mathrm{tg}\,y}dx}=e^{\ln(\mathrm{tg}\,y)}=\mathrm{tg}\,y\,.$$

Multiplicando o fator integrante pela equação, obtemos a equação

$$\mathrm{tg}^2y\,dx+(2x\,\mathrm{tg}\,y\sec^2y+\mathrm{sen}y)dy=0\,,$$

a qual é exata e tem suas soluções dadas por

$$x\,\mathrm{tg}^2y-\cos y=C\,,\ C\in\mathbb{R}.$$

∎