UFPR - Universidade Federal do Paraná
Departamento de Matemática
CM043 - Cálculo III - Turma B
Prof. José Carlos Eidam

GABARITO DA TERCEIRA PROVA - PROVA TIPO A - 22/05/2012

Questão 1 **(2 pontos)** Determine a solução geral das equações diferenciais lineares de segunda ordem abaixo:

(a) **(1 ponto)** $y'' - 4y' + 4y = 0$

Solução. A equação característica é $\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$, que possui $\lambda = 2$ como raiz dupla. Logo, a solução geral da equação é

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 x e^{2x},$$

com $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$. ∎

(b) **(1 ponto)** $y'' - 6y' + 34y = 0$

Solução. A equação característica é $\lambda^2 - 6\lambda + 34 = 0$, que possui raízes complexas $\lambda_1 = 3 + 5i$ e $\lambda_2 = 3 - 5i$. Logo, a solução geral da equação é

$$y = C_1 e^{3x}\cos(5x) + C_2 e^{3x}\operatorname{sen}(5x),$$

com $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$. ∎

Questão 2 Considere a equação diferencial linear de segunda ordem

$$x^2 y'' - 3xy' + 5y = 0 \tag{1}$$

em $(0, \infty)$.

(a) **(2 pontos)** Determine um conjunto linearmente independente $\{y_1, y_2\}$ de soluções da equação (1).

Solução. A equação (1) é uma equação de Euler. Fazendo a mudança de variável $x = e^z$, esta equação é equivalente à equação com coeficientes constantes

$$\frac{d^2y}{dz^2} - 4\frac{dy}{dz} + 5y = 0,$$

que tem equação característica $\lambda^2 - 4\lambda + 5 = 0$. Esta equação tem soluções $\lambda_1 = 2 + i$ e $\lambda_2 = 2 - i$ e portanto, a equação em questão tem soluções linearmente independentes $y_1 = e^{2z}\cos z$ e $y_2 = e^{2z}\operatorname{sen} z$. Voltando à variável $x = \ln z$, obtemos soluções linearmente independentes

$$y_1 = x^2\cos(\ln x) \text{ e } y_2 = x^2\operatorname{sen}(\ln x).$$

∎

(b) **(3 pontos)** Determine a solução geral da equação

$$x^2 y'' - 3xy' + 5y = 1$$

Solução. Escrevendo a equação na forma padrão, temos

$$y'' - \frac{3}{x} y' + \frac{5}{x^2} y = \frac{1}{x^2}.$$

Fazendo as contas, obtemos $W(y_1, y_2) = x^3$. Aplicando o método da variação dos parâmetros com $f(x) = 1/x^2$, obtemos a solução particular

$$\begin{aligned} y_p &= -\left(\int \frac{y_2 f}{W(y_1, y_2)} dx\right) y_1 + \left(\int \frac{y_1 f}{W(y_1, y_2)} dx\right) y_2 \\ &= -\left(\int \frac{x^2 \operatorname{sen}(\ln x) \cdot (1/x^2)}{x^3} dx\right) x^2 \cos(\ln x) + \left(\int \frac{x^2 \cos(\ln x) \cdot (1/x^2)}{x^3} dx\right) x^2 \operatorname{sen}(\ln x) \\ &= -\left(\int \frac{\operatorname{sen}(\ln x)}{x^3} dx\right) x^2 \cos(\ln x) + \left(\int \frac{\cos(\ln x)}{x^3} dx\right) x^2 \operatorname{sen}(\ln x) \end{aligned}$$

Para resolver as integrais acima, fazemos $u = \ln x$, (portanto, $dx = e^u du$) e integramos por partes, obtendo

$$\int \frac{\operatorname{sen}(\ln x)}{x^3} dx = \int e^{-2u} \operatorname{sen} u \, du = -\frac{1}{5} e^{-2u} (2 \operatorname{sen} u + \cos u) = -\frac{x^{-2}}{5} (2 \operatorname{sen}(\ln x) + \cos(\ln x)),$$

e

$$\int \frac{\cos(\ln x)}{x^3} dx = \int e^{-2u} \cos u \, du = -\frac{1}{5} e^{-2u} (\operatorname{sen} u - 2\cos u) = \frac{x^{-2}}{5} (\operatorname{sen}(\ln x) + 2\cos(\ln x)),$$

Logo,

$$y_p = \frac{1}{5} \left(\cos^2(\ln x) + \operatorname{sen}^2(\ln x)\right) = \frac{1}{5}.$$

Assim, a solução geral da equação dada é

$$y = \frac{1}{5} + C_1 x^2 \cos(\ln x) + C_2 x^2 \operatorname{sen}(\ln x), \ C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

∎

Questão 3 Considere a equação diferencial linear de segunda ordem

$$xy'' + (x-1)y' - y = 0 \tag{2}$$

em $(0, \infty)$.

(a) **(3 pontos)** Mostre que $y_1 = e^{-x}$ é solução da equação (2) e determine uma solução y_2 de (2) tal que $\{y_1, y_2\}$ seja linearmente independente.

Solução. Escrevendo a equação na forma padrão, obtemos

$$y'' + \underbrace{\left(1 - \frac{1}{x}\right)}_{p} y' - \frac{1}{x} y = 0\,.$$

Tomando $y_2 = v y_1$, temos que y_2 é solução de (2) se e só se $v'' + (p + 2(y_1'/y_1))v' = 0$, ou seja,

$$v'' - \left(1 + \frac{1}{x}\right) v' = 0\,.$$

O fator integrante desta equação é $e^{-\int (1+1/x)dx} = \dfrac{e^{-x}}{x}$. Multiplicando este fator pela equação, obtemos

$$\left(\frac{e^{-x}}{x} v'\right)' = 0\,,$$

de onde concluímos que $v = C\int x e^x dx = C(x-1)e^x + D$, com $C, D \in \mathbb{R}$. Tomando $C = 1$ e $D = 0$, obtemos $y_2 = v y_1 = x - 1$. ∎

(b) **(2 pontos)** Determine a solução geral da equação $xy'' + (x-1)y' - y = x^2 e^{-x}$.

Solução. Antes de mais nada, devemos escrever a equação na forma padrão, i.e., o coeficiente de y'' deve ser 1:

$$y'' + \left(1 - \frac{1}{x}\right) y' - \frac{1}{x} y = x e^{-x}\,.$$

Temos que $W(y_1, y_2) = x e^{-x}$, logo, aplicando o método de variação dos parâmetros com $f(x) = x2e^{-x}$, obtemos a solução particular

$$\begin{aligned}
y_p &= -\left(\int \frac{y_2 f}{W(y_1,y_2)} dx\right) y_1 + \left(\int \frac{y_1 f}{W(y_1,y_2)} dx\right) y_2 \\
&= -\left(\int \frac{(x-1)xe^{-x}}{xe^{-x}} dx\right) e^{-x} + \left(\int \frac{e^{-x} x e^{-x}}{xe^{-x}} dx\right)(x-1) \\
&= \left(\int (1-x) dx\right) e^{-x} + \left(\int e^{-x} dx\right)(x-1) \\
&= \left(1 - \frac{x^2}{2}\right) e^{-x}\,.
\end{aligned}$$

Portanto, a solução geral da equação é

$$y = \left(1 - \frac{x^2}{2}\right) e^{-x} + C_1 e^{-x} + C_2 (x-1)\,,\ \ C_1, C_2 \in \mathbb{R}\,.$$

∎