

GABARITO DA QUARTA PROVA - TIPO A - 14/06/2012

Questão 1 Determine a transformada de Laplace $\mathcal{L}f(s)$ de cada uma das funções abaixo:

(a) (1 ponto) $f(t) = u_2(t)(t-2)^2 e^{t-2} - t^4 e^{2t}$

Solução. Temos que $\mathcal{L}f(s) = \frac{2e^{-2s}}{(s-1)^3} - \frac{24}{(s-2)^5}$.

(b) (1 ponto) $f(t) = \begin{cases} \sinh(2t) & , \text{ se } 0 \leq t \leq 1 \\ \sinh(2t) + \text{sen}(t-1) & , \text{ se } t > 1 \end{cases}$

Solução. Vemos que $f(t) = \sinh(2t) + u_1(t)\text{sen}(t-1)$, logo, $\mathcal{L}f(s) = \frac{2}{s^2-4} + \frac{e^{-s}}{s^2+1}$.

Questão 2 Determine a transformada inversa de Laplace $\mathcal{L}^{-1}f(s)$ de cada uma das funções abaixo:

(a) (1 ponto) $Y(s) = \frac{e^{-2s} + s}{s^2 - 6s + 9}$

Solução. Temos

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{e^{-2s}}{s^2 - 6s + 9} + \frac{s}{s^2 - 6s + 9} \\ &= \frac{e^{-2s}}{(s-3)^2} + \frac{s}{(s-3)^2} \\ &= \frac{e^{-2s}}{(s-3)^2} + \frac{1}{s-3} + \frac{3}{(s-3)^2}, \end{aligned}$$

logo, $\mathcal{L}^{-1}Y(t) = u_2(t)(t-2)e^{-3(t-2)} + e^{3t} + 3te^{3t}$.

(b) (1 ponto) $Y(s) = \frac{(s-1)e^{-s}}{s^2 - 4s + 5}$

Solução. Temos $\frac{s-1}{s^2 - 4s + 5} = \frac{s-2}{(s-2)^2 + 1} + \frac{1}{(s-2)^2 + 1}$, portanto,

$$\mathcal{L}^{-1}Y(t) = u_1(t)e^{2(t-1)}(\cos(t-1) + \text{sen}(t-1)).$$

Questão 3 Resolva as equações diferenciais de segunda ordem abaixo utilizando a transformada de Laplace:

(a) (2 pontos) $y'' + 4y' + 4y = 1 - u_1(t)$, $y(0) = y'(0) = 0$

Solução. Tomando a transformada de Laplace, temos $Y(s) = \frac{1}{s(s^2 + 4s + 4)} - \frac{e^{-s}}{s(s^2 + 4s + 4)}$.
Decompondo em frações parciais, obtemos

$$\frac{1}{s(s^2 + 4s + 4)} = \frac{1}{4s} - \frac{1}{4(s+2)} - \frac{1}{2(s+2)^2},$$

logo,

$$y = \mathcal{L}^{-1} Y(t) = \frac{1}{4}(1 - e^{-2t}) - \frac{1}{2}te^{-2t} - u_1(t) \left(\frac{1}{4}(1 - e^{-2(t-1)}) - \frac{1}{2}(t-1)e^{-2(t-1)} \right).$$

■

(b) (2 pontos) $y'' + 16y = u_2(t)$, $y(0) = y'(0) = 1$

Solução. Tomando a transformada de Laplace, temos $Y = \frac{e^{-2s}}{s(s^2 + 16)} + \frac{s+1}{s^2 + 16}$. Decompondo em frações parciais, obtemos

$$Y = \frac{e^{-2s}}{16} \left(\frac{1}{s} - \frac{s}{s^2 + 16} \right) + \frac{s}{s^2 + 16} + \frac{1}{4} \frac{4}{s^2 + 4^2},$$

logo, a solução é

$$y = \mathcal{L}^{-1} Y(t) = \frac{u_2(t)}{16} \{1 - \cos(4(t-2))\} + \left(\cos(4t) + \frac{\text{sen}(4t)}{4} \right).$$

■

(c) (2 pontos) $y'' + 2y' + y = \delta(t-1) + \delta(t-2)$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$

Solução. Aplicando a transformada de Laplace, temos

$$Y = \frac{1}{(s+1)^2} + \frac{e^{-s}}{(s+1)^2} + \frac{e^{-2s}}{(s+1)^2},$$

logo a solução procurada é

$$y = \mathcal{L}^{-1} Y(t) = te^{-t} + u_1(t)(t-1)e^{-(t-1)} + u_2(t)(t-2)e^{-(t-2)}.$$

■