UFPR - Universidade Federal do Paraná
Departamento de Matemática
CM043 - Cálculo III - Turma B
Prof. José Carlos Eidam

GABARITO DA QUARTA PROVA - TIPO B - 14/06/2012

Questão 1 Determine a transformada de Laplace $\mathscr{L}f(s)$ de cada uma das funções abaixo:

(a) **(1 ponto)** $f(t) = \begin{cases} \sinh(2t) & \text{, se } 0 \le t \le 1 \\ \sinh(2t) + \operatorname{sen}(t-1) & \text{, se } t > 1 \end{cases}$

Solução. Vemos que $f(t) = \sinh(2t) + u_1(t)\operatorname{sen}(t-1)$, logo, $\mathscr{L}f(s) = \dfrac{2}{s^2-4} + \dfrac{e^{-s}}{s^2+1}$.

∎

(b) **(1 ponto)** $f(t) = u_2(t)(t-2)^2 e^{t-2} - t^4 e^{2t}$

Solução. Temos que $\mathscr{L}f(s) = \dfrac{2e^{-2s}}{(s-1)^3} - \dfrac{24}{(s-2)^5}$.

∎

Questão 2 Determine a transformada inversa de Laplace $\mathscr{L}^{-1}f(s)$ de cada uma das funções abaixo:

(a) **(1 ponto) (1 ponto)** $Y(s) = \dfrac{(s-1)e^{-s}}{s^2-4s+5}$

Solução. Temos $\dfrac{s-1}{s^2-4s+5} = \dfrac{s-2}{(s-2)^2+1} + \dfrac{1}{(s-2)^2+1}$, portanto,

$$\mathscr{L}^{-1}Y(t) = u_1(t)e^{2(t-1)}(\cos(t-1) + \operatorname{sen}(t-1)).$$

∎

(b) **(1 ponto)** $Y(s) = \dfrac{e^{-2s}+s}{s^2-6s+9}$

Solução. Temos

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{e^{-2s}}{s^2-6s+9} + \frac{s}{s^2-6s+9} \\ &= \frac{e^{-2s}}{(s-3)^2} + \frac{s}{(s-3)^2} \\ &= \frac{e^{-2s}}{(s-3)^2} + \frac{1}{s-3} + \frac{3}{(s-3)^2}, \end{aligned}$$

logo, $\mathscr{L}^{-1}Y(t) = u_2(t)(t-2)e^{-3(t-2)} + e^{3t} + 3te^{3t}$. ∎

Questão 3 Resolva as equações diferenciais de segunda ordem abaixo utilizando a transformada de Laplace:

(a) **(2 pontos)** $y'' + 16y = u_2(t)$, $y(0) = y'(0) = 1$

Solução. Tomando a transformada de Laplace, temos $Y = \dfrac{e^{-2s}}{s(s^2+16)} + \dfrac{s+1}{s^2+16}$. Decompondo em frações parciais, obtemos

$$Y = \frac{e^{-2s}}{16}\left(\frac{1}{s} - \frac{s}{s^2+16}\right) + \frac{s}{s^2+16} + \frac{1}{4}\frac{4}{s^2+4^2},$$

logo, a solução é

$$y = \mathscr{L}^{-1}Y(t) = \frac{u_2(t)}{16}\{1 - \cos(4(t-2))\} + \left(\cos(4t) + \frac{\operatorname{sen}(4t)}{4}\right).$$

∎

(b) **(2 pontos)** $y'' + 4y' + 4y = 1 - u_1(t)$, $y(0) = y'(0) = 0$

Solução. Tomando a transformada de Laplace, temos $Y(s) = \dfrac{1}{s(s^2+4s+4)} - \dfrac{e^{-s}}{s(s^2+4s+4)}$. Decompondo em frações parciais, obtemos

$$\frac{1}{s(s^2+4s+4)} = \frac{1}{4s} - \frac{1}{4(s+2)} - \frac{1}{2(s+2)^2},$$

logo,

$$y = \mathscr{L}^{-1}Y(t) = \frac{1}{4}(1 - e^{-2t}) - \frac{1}{2}te^{-2t} - u_1(t)\left(\frac{1}{4}(1 - e^{-2(t-1)}) - \frac{1}{2}(t-1)e^{-2(t-1)}\right).$$

∎

(c) **(2 pontos)** $y'' + 2y' + y = \delta(t-1) + \delta(t-2)$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$

Solução. Aplicando a transformada de Laplace, temos

$$Y = \frac{1}{(s+1)^2} + \frac{e^{-s}}{(s+1)^2} + \frac{e^{-2s}}{(s+1)^2},$$

logo a solução procurada é

$$y = \mathscr{L}^{-1}Y(t) = te^{-t} + u_1(t)(t-1)e^{-(t-1)} + u_2(t)(t-2)e^{-(t-2)}.$$

∎